Projet thématique : stabilité des valeurs propres des matrices aléatoires non-hermitiennes, de l'heuristique à la preuve

Proposé par : Guillaume Dubach
Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École Polytechnique.

Les matrices aléatoires sont des objets mathématiques omniprésents, susceptibles de nombreuses applications, et dont la structure se prête à une étude théorique d'une grande richesse. Introduites dans les années 1950-60 par des physiciens tels qu'Eugene Wigner, Freeman Dyson et Jean Ginibre, elles font l'objet d'une théorie mathématique qui s'est développée en dialogue constant avec la physique, et qui a connu des progrès considérables au cours des vingt dernières années.

Les modèles *non-hermitiens*, c'est-à-dire sans symétrie particulière, posent des difficultés spécifiques. Ces modèles apparaissent notamment en théorie de la diffusion chaotique quantique, où les résonances d'un système ouvert correspondent aux valeurs propres d'un hamiltonien effectif non-hermitien. De nombreux résultats concernant ces modèles ont été obtenus en physique par des méthodes puissantes mais heuristiques, et attendent une justification rigoureuse ; il y a donc là une source importante de défis lancés aux techniques mathématiques.

L'objet mathématique concerné au premier chef par ce projet est la matrice des overlaps entre vecteurs propres, qui a fait l'objet de nombreuses études ces dix dernières années, aussi bien du côté des mathématiques [1,3] que de la physique [5]. Cette matrice, introduite par Chalker et Mehlig [2], est définie par la formule $\mathscr{O}_{ij} = (L_i^* L_j)(R_j^* R_i)$ où apparaissent des vecteurs propres à gauche (L_i) et à droite (R_i), normalisés de telle sorte que $L_i^* R_j = \delta_{ij}$. Les overlaps diagonaux $\mathscr{O}_{ii}$ sont les carrés des conditionnements des valeurs propres, et gouvernent par exemple leur stabilité sous perturbation. Pour l'ensemble de Ginibre complexe, la loi d'un overlap diagonal $\mathscr{O}_{ii}$ est désormais bien comprise [1, 4], tandis que les méthodes de la physique fournissent des prédictions pour des classes de modèles beaucoup plus larges [5].

Le projet s'articule autour des directions suivantes :

(a) *Étude globale de $\mathscr{O}$ dans le cas de l'ensemble de Ginibre complexe.* Développer une compréhension globale de la matrice des overlaps et notamment de son spectre (dont la distribution fait apparaître de remarquables régularités, observées numériquement mais non prouvées à ce jour) ainsi que des corrélations précises entre ses coefficients (que les études récentes ne permettent pas de saisir au-delà de quelques calculs de moments).

(b) *Classes de symétrie réelle et quaternionique.* Décrire les overlaps des ensembles de Ginibre réel et quaternionique, en particulier pour les valeurs propres complexes de l'ensemble réel, où la répulsion par l'axe réel modifie la statistique.

Il est attendu que le ou la candidat(e) ait reçu une formation du meilleur niveau en matrices aléatoires, soutenu une thèse dans ce domaine ou un domaine proche, et si possible, ait également déjà une certaine familiarité avec les techniques venues de la physique telles que les résolvantes quaternioniques ou la supersymétrie.

Références

[1] P. Bourgade and G. Dubach, *The distribution of overlaps between eigenvectors of Ginibre matrices*, Probab. Theory Related Fields **177** (2020), 397–464. doi:10.1007/s00440-019-00953-x.

[2] J. T. Chalker and B. Mehlig, *Eigenvector statistics in non-Hermitian random matrix ensembles*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 3367–3370.

[3] N. Crawford and R. Rosenthal, *Eigenvector correlations in the complex Ginibre ensemble*, Ann. Appl. Probab. **32** (2022), no. 4, 2706–2754. doi:10.1214/21-AAP1746.

[4] Y. V. Fyodorov, *On statistics of bi-orthogonal eigenvectors in real and complex Ginibre ensembles: combining partial Schur decomposition with supersymmetry*, Comm. Math. Phys. **363** (2018), 579–603. arXiv:1710.04699.

[5] M. A. Nowak and W. Tarnowski, *Probing non-orthogonality of eigenvectors in non-Hermitian matrix models: diagrammatic approach*, J. High Energy Phys. **6** (2018), 152. doi:10.1007/JHEP06(2018)152.