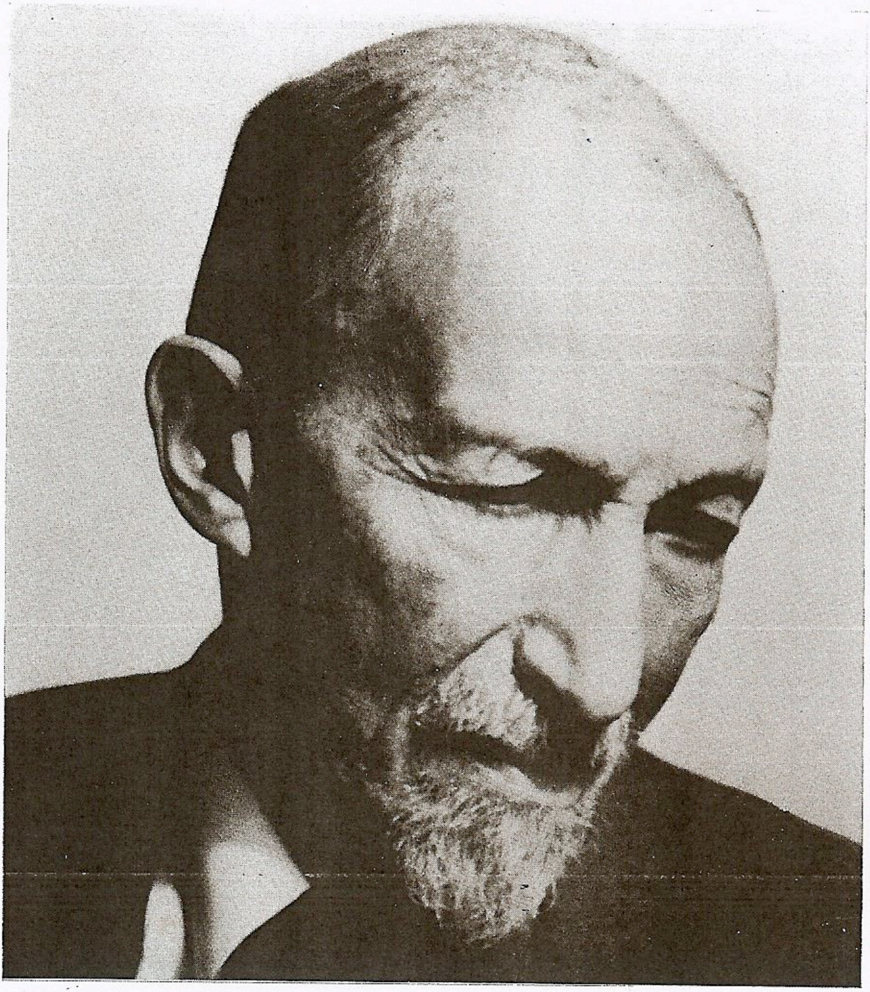
Quelques mots sur l'œuvre de Jacques Hadamard

Jean-Benoît Bost

Inauguration de la FMJH

17 mai 2010

Pourquoi la Fondation Mathématique Jacques Hadamard ?



JACQUES HADAMARD

(1865 — 1963)

Une œuvre immense...

Une œuvre immense...

- fonctions analytiques ; croissance des fonctions entières ;

Une œuvre immense...

- fonctions analytiques ; croissance des fonctions entières ;
- fonction ζ, séries de Dirichlet, applications arithmétiques ;

Une œuvre immense...

- fonctions analytiques ; croissance des fonctions entières ;
- fonction ζ, séries de Dirichlet, applications arithmétiques ;
- théorie globale des systèmes dynamiques et des flots géodésiques ; géométrie à courbure négative ;

Une œuvre immense...

- fonctions analytiques ; croissance des fonctions entières ;
- fonction ζ, séries de Dirichlet, applications arithmétiques ;
- théorie globale des systèmes dynamiques et des flots géodésiques ; géométrie à courbure négative ;
- équations intégrales ; fonctionnelles ; calcul des variations ;

Une œuvre immense...

- fonctions analytiques ; croissance des fonctions entières ;
- fonction ζ, séries de Dirichlet, applications arithmétiques ;
- théorie globale des systèmes dynamiques et des flots géodésiques ; géométrie à courbure négative ;
- équations intégrales ; fonctionnelles ; calcul des variations ;
- équations aux dérivées partielles ; problème de Cauchy, propagation des ondes ;

Une œuvre immense...

- fonctions analytiques ; croissance des fonctions entières ;
- fonction ζ, séries de Dirichlet, applications arithmétiques ;
- théorie globale des systèmes dynamiques et des flots géodésiques ; géométrie à courbure négative ;
- équations intégrales ; fonctionnelles ; calcul des variations ;
- équations aux dérivées partielles ; problème de Cauchy, propagation des ondes ;
- *varia* : algèbre, géométrie élémentaire, mécanique, enseignement, ...

- P. Lévy, S. Mandelbrojt, B. Malgrange, P. Malliavin : La vie et l'œuvre de Jacques Hadamard.
  Monographie de l'Enseignement Mathématique no. 16, Genève, 1967.

- P. Lévy, S. Mandelbrojt, B. Malgrange, P. Malliavin : La vie et l'œuvre de Jacques Hadamard.
  Monographie de l'Enseignement Mathématique no. 16, Genève, 1967.

- J.-P. Kahane : Jacques Hadamard.
  Math. Intelligencer 13 (1991), no. 1, 23-29.

- P. Lévy, S. Mandelbrojt, B. Malgrange, P. Malliavin : La vie et l'œuvre de Jacques Hadamard.
  Monographie de l'Enseignement Mathématique no. 16, Genève, 1967.
- J.-P. Kahane : Jacques Hadamard.
  Math. Intelligencer 13 (1991), no. 1, 23-29.
- V. Maz'ya, T. Shaposnikova : Jacques Hadamard, a universal mathematician.
  History of Mathematics 14. AMS, Providence, 1998.

Ses articles et mémoires sont pour l'essentiels rassemblés dans :

Œuvres de Jacques Hadamard. Tomes I-IV.

Comité de publication des œuvres de Jacques Hadamard :
M. Fréchet, P. Lévy, S. Mandelbrojt, L. Schwartz.

Editions du CNRS, Paris, 1968.

Poincaré : *...contributions considérables et de premier ordre.*

Une œuvre immense et dont l'influence a été considérable

Une œuvre immense et dont l'influence a été considérable

- 1888 — 196.

Une œuvre immense et dont l'influence a été considérable

- 1888 — 196.
- *Pour inventer, il faut penser à côté, c'est-à-dire qu'il est important pour celui qui veut découvrir de ne pas se confiner à un seul chapitre de la science, mais de se tenir au courant de divers autres.*

Une œuvre immense et dont l'influence a été considérable

- 1888 — 196.
- *Pour inventer, il faut penser à côté, c'est-à-dire qu'il est important pour celui qui veut découvrir de ne pas se confiner à un seul chapitre de la science, mais de se tenir au courant de divers autres.*
- *Après avoir commencé un travail sur un certain ensemble de questions et voyant que plusieurs auteurs s'étaient mis à suivre cette direction, je l'ai souvent abandonnée et j'ai cherché quelque chose d'autre.*

  (Extraits de *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, 1949–1959)

Premier et dernier articles

Premier et dernier articles

- 1888 : Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable.

Premier et dernier articles

- 1888 : Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable. *CRAS, Paris*, 106 2, 259.

Premier et dernier articles

- 1888 : Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable. *CRAS, Paris,* 106 2, 259.

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Premier et dernier articles

- 1888 : Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable. *CRAS, Paris,* 106 2, 259.

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

$$R^{-1} = \limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Premier et dernier articles

- 1888 : Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable. *CRAS, Paris,* 106 2, 259.

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

$$R^{-1} = \limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n}.$$

- 1955 : Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack.

Premier et dernier articles

- 1888 : Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable. *CRAS, Paris,* 106 2, 259.

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

$$R^{-1} = \limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n}.$$

- 1955 : Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack. *Rend. Circ. Mat. Palermo,* (2), 337 - 346.

Premier et dernier articles

- 1888 : Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable. *CRAS, Paris,* 106 2, 259.

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

$$R^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}.$$

- 1955 : Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack. *Rend. Circ. Mat. Palermo,* (2), 337 - 346.

  Théorie du potentiel « parabolique », poursuivie par Doob, Moser,...

- 1896 : Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques.

- 1896 : Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques.
  Bulletin de la Société Mathématique de France, 24,199-220.

- 1896 : Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques.
Bulletin de la Société Mathématique de France, 24,199-220.

$$\pi(x) := |\{p \text{ premier} \leq x\}| \sim \frac{x}{\log x}.$$

- 1896 : Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques.
  Bulletin de la Société Mathématique de France, 24,199-220.

$$\pi(x) := |\{p \text{ premier} \leq x\}| \sim \frac{x}{\log x}.$$

On définit, pour $\mathcal{R}(s) > 1$,

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Remonte à Euler, Dirichlet, ...

Remonte à Euler, Dirichlet, ...

Riemann (1859) : prolongement analytique, rôle des zéros complexes de ζ.

Remonte à Euler, Dirichlet, ...

Riemann (1859) : prolongement analytique, rôle des zéros complexes de ζ.

Stieljes avait démontré conformément aux prévisions de Riemann, que ces zéros sont tous de la forme $1/2 + ti$ *(le nombre* t *étant réel) ; mais sa démonstration n'a jamais été publiée, et il n'a même pas été établi que la fonction* ζ *n'ait pas de zéro sur la droite* $\mathcal{R}(s) = 1$. *C'est cette dernière conclusion que je me propose de démontrer.*

- 1911 : (avec J. Kürschák) Propriétés générales des corps et des variétés algébriques.

- 1911 : (avec J. Kürschák) Propriétés générales des corps et des variétés algébriques.

  Chapitre I 10 de la version française de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, d'après l'article allemand de G. Landsberg.

- 1911 : (avec J. Kürschák) Propriétés générales des corps et des variétés algébriques.

  Chapitre I 10 de la version française de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, d'après l'article allemand de G. Landsberg.

  Nombreux ajouts et éclaircissements relativement à l'original allemand.

- 1911 : (avec J. Kürschák) Propriétés générales des corps et des variétés algébriques.

  Chapitre I 10 de la version française de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, d'après l'article allemand de G. Landsberg.

  Nombreux ajouts et éclaircissements relativement à l'original allemand.

  Notamment présentation synthétique de la théorie des nombres *p-adiques* et des simplifications qu'elle apporte à la théorie de la ramification.

Tome I; deuxième volume; deuxième fascicule.

Sommaire.

Avis.

Dans l'édition française, on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté, on a cependant largement tenu compte des traditions et des habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande a, en effet, indiqué les modifications qu'il jugeait convenable d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les intéressés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français sont mises entre deux astérisques. L'importance d'une telle collaboration, dont l'édition française de l'Encyclopédie offrira le premier exemple n'échappera à personne.

Fascicules sous presse:

Tome I, vol. 1: **Groupes finis discontinus,** fin (H. Burkhardt — H. Vogt). — **Compléments. — Renseignements bibliographiques. — Index.**

Tome I, vol. 2: **Formes algébriques,** fin (G. Landsberg — J. Hadamard — J. Kürschák). **Invariants** (F. W. Meyer — J. Drach).

Tome I, vol. 3: **Applications de l'Analyse à la Théorie des nombres,** fin (P. Bachmann — J. Hadamard — E. Maillet).

Tome I, vol. 4: **Statistique,** fin (L. von Bortkiewicz — F. Oltramare). — **Assurances** (G. Bohlmann — Poterin du Motel). — **Économie politique** (V. Pareto).

Tome II, vol. 1: **Recherches contemporaines sur la théorie des fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles** (E. Borel — L. Zoretti — P. Montel — M. Fréchet). — **Calcul différentiel** (A. Voss — J. Molk).

Tome II, vol. 2: **Analyse algébrique** (A. Pringsheim — G. Faber — J. Molk). — **Fonctions d'une variable complexe** (W. Osgood — J. Chazy).

Tome II, vol. 4: **Équations aux dérivées partielles** (E. von Weber — G. Floquet — E. Goursat).

Tome II, vol. 5: **Équations fonctionnelles** (S. Pincherle). — **Interpolation trigonométrique** (H. Burkhardt — E. Esclangon).

Tome III, vol. 1: **Principes de la Géométrie** (F. Enriques). — **Notions de courbe et surface** (H. von Mangoldt — L. Zoretti).

Tome III, vol. 2: **Géométrie projective** (A. Schoenflies — A. Tresse).

Tome III, vol. 3: **Coniques** (F. Dingeldey — E. Fabry).

Tome III, vol. 4: **Quadriques** (O. von Staude — A. Grévy).

Tome IV, vol. 2: **Fondements géométriques de la mécanique** (H Timerding — L. Lévy).

Tome IV, vol. 4: **Analyse vectorielle** (M. Abraham — P. Langevin). — **Principes physiques de l'hydrodynamique** (A. E. H. Love — P. Appell — H. Beghin).

Tome IV, vol. 5: **Balistique extérieure** (C. Cranz — E. Vallier).

Tome V, vol. 2: **Atomistique** (F. W. Hinrichsen — E. Study — M. Joly — J. Roux).

Tome V, vol. 3: **Principes physiques de l'électricité; action à distance** (R. Reiff — A. Sommerfeld — E. Rothé).

Tome VI, vol. 1: **Géodésie** (P. Pizzetti — L. Noirel).

Tome VII, vol. 1: **Coordonnées absolues et relatives** (E. Anding — H. Bourget). — **Réfraction** (A. Bemporad — P. Puiseux).

I 10. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES CORPS ET DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE **G. LANDSBERG** (KIEL),
PAR **J. HADAMARD** (PARIS) ET **J. KÜRSCHÁK** (BUDAPEST).

Notion de corps.

1. Introduction des considérations arithmétiques dans l'Algèbre. Dans l'article précédent (I 9), on a étudié les polynomes ou fonctions rationnelles entières en se plaçant successivement à des points de vue bien distincts. Parmi ces points de vue il en est deux qui ont un caractère extrême et qui ont particulièrement retenu notre attention.

C'est au premier de ces deux points de vue extrêmes qu'on s'est placé dans la première partie de l'article I 9 (nᵒˢ **1** à **88**); il consiste à prendre pour coefficients des fonctions rationnelles entières envisagées des quantités *absolument quelconques*. Si, par exemple, ces coefficients sont des nombres, ces nombres peuvent être aussi bien fractionnaires qu'entiers, rationnels qu'irrationnels, complexes que réels. Une seule propriété essentielle leur est imposée: celle d'être constants, indépendants des variables par rapport auxquelles les fonctions rationnelles entières sont ordonnées.

Dans la plus grande partie des nᵒˢ **89** à **92** de l'article I 9 il en est tout autrement. Les seuls nombres que l'on envisage et que l'on se donne le droit d'employer sont les nombres entiers (réels, rationnels); par conséquent aussi les seules fonctions rationnelles entières qu'on prenne en considération sont celles dont les coefficients sont des nombres entiers, toutes les autres fonctions rationnelles entières étant regardées comme inexistantes. En un mot, lorsqu'on se place à ce second point de vue extrême, tout se passe comme si la théorie des nombres complexes, celle des nombres irrationnels et même celle des nombres fractionnaires n'était point faite.

Un point de vue intermédiaire, qui a été lui aussi mentionné aux

L'ensemble des nombres algébriques entiers (mod. p) forme un domaine holoïde [n° **15**]. L'ensemble des unités (mod. p) forme un module logarithmique [n° **19**].

Si α et β sont deux nombres algébriques tels que

$$\frac{\alpha - \beta}{p^\varrho}$$

soit un nombre algébrique entier (mod. p), on convient d'écrire

$$\alpha \equiv \beta \ (\text{mod. } p^\varrho).$$

Ici ϱ peut être un nombre entier ordinaire (positif, nul ou négatif). En écrivant que l'on a, par exemple,

$$\frac{\sqrt{5}}{12} \equiv \frac{1}{12} \quad (\text{mod. } 2^{-1})$$

on veut dire que le quotient

$$\frac{\frac{\sqrt{5}}{12} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire le nombre $\frac{\sqrt{5}-1}{6}$ défini par l'équation

$$9x^2 + 3x - 1 = 0,$$

est un nombre entier (mod. 2). On voit par contre que $\frac{\sqrt{5}}{12}$ et $\frac{1}{12}$ ne sont pas congrus (mod. 2^0).

Il convient d'ailleurs d'observer que l'on n'est pas en droit de remplacer ici (mod. 2^0) par (mod. 1).

Ceci posé, soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions rationnelles entières de x ayant pour coefficients des nombres rationnels ou algébriques. Lorsque les coefficients du quotient

$$\frac{f(x) - g(x)}{p^\varrho}$$

sont des nombres entiers (mod. p), on convient d'écrire

$$f(x) \equiv g(x) \qquad (\text{mod. } p^\varrho).*$$

43. *Les nombres p-adiques. Un nombre p-adique est un *symbole* représenté par une série

$$(1) \qquad a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + a_{\varrho+2} p^{\varrho+2} + \cdots\cdots,$$

où ϱ est un nombre rationnel entier (positif, nul ou négatif) et où les coefficients $a_\varrho, a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \ldots\ldots$ sont soit des nombres rationnels entiers (mod. p), auquel cas on dit que le nombre p-adique est *rationnel*, soit des nombres algébriques entiers (mod. p) faisant partie

d'un corps algébrique donné $(\Re, \xi)$, auquel cas on dit que le nombre p-adique est *algébrique.*

Les nombres

$$\begin{aligned} A_\varrho &= a_\varrho p^\varrho, \\ A_{\varrho+1} &= a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1}, \\ A_{\varrho+2} &= a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + a_{\varrho+2} p^{\varrho+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

sont les *réduites* successives du nombre p-adique

$$a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \cdots + a_{\varrho+i} p^{\varrho+i} + \cdots\cdots;$$

A_k est la $k^{\text{ième}}$ réduite.

Ces réduites successives ne tendent pas nécessairement vers une limite représentée par un nombre réel ou imaginaire: les nombres p-adiques ne sont d'ailleurs en rien semblables aux nombres réels ou imaginaires qu'on envisage en Analyse; ce ne sont que des *symboles* que l'on soumet aux règles de calcul suivantes:

1°) Deux nombres p-adiques[156])

$$\begin{aligned} A &= a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \cdots + a_{\varrho+i} p^{\varrho+i} + \cdots\cdots, \\ B &= b_\varrho p^\varrho + b_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \cdots + b_{\varrho+i} p^{\varrho+i} + \cdots\cdots \end{aligned}$$

sont *égaux* lorsqu'on a, pour chaque indice i,

$$A_{\varrho+i} = B_{\varrho+i} \qquad (\text{mod. } p^{\varrho+i+1}).$$

2°) On a

$$\begin{aligned} A + B &= (a_\varrho + b_\varrho) p^\varrho + (a_{\varrho+1} + b_{\varrho+1}) p^{\varrho+1} + \cdots + (a_{\varrho+i} + b_{\varrho+i}) p^{\varrho+i} + \cdots \\ AB &= a_\varrho b_\varrho p^{2\varrho} + (a_\varrho b_{\varrho+1} + a_{\varrho+1} b_\varrho) p^{2\varrho+1} + \cdots \\ &\quad + (a_\varrho b_{\varrho+i} + a_{\varrho+1} b_{\varrho+i-1} + \cdots + a_{\varrho+i} b_\varrho) p^{2\varrho+i} + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Nous dirons souvent que la série (1) est une *série* p-adique. Cette façon de parler est surtout commode dans les recherches où les symboles p-adiques sont envisagés comme représentant des séries numériques ordinaires [cf. n° **49**].

Parmi les séries du type (1) les plus simples sont celles où tous

156) *Si les exposants de p dans le premier terme de chacune des deux séries qui définissent A et B ne sont pas égaux, il suffit, pour appliquer les formules du texte, de supposer que un ou plusieurs des premiers coefficients de l'une des deux séries sont nuls. Rien n'empêche d'ailleurs de supposer que les coefficients de l'une des deux séries fassent partie d'un corps $(\Re, \xi_1)$ et que les coefficients de l'autre série fassent partie d'un corps $(\Re, \xi_2)$ distinct du précédent. Dans ce cas les coefficients de la somme $A + B$ et ceux du produit AB font partie du corps

$$(\Re, \xi_1, \xi_2)$$

obtenu en adjoignant à $\Re$, à la fois ξ_1 et ξ_2.*

- 1964 : La théorie des équations aux dérivées partielles.

- 1964 : La théorie des équations aux dérivées partielles.
  Editions scientifiques, Pékin.

J. 阿达瑪

偏微分方程論

JACQUES HADAMARD

LA THEORIE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

科学出版社

EDITIONS SCIENTIFIQUES

PEKIN, 1964

- 1964 : La théorie des équations aux dérivées partielles.
  Editions scientifiques, Pékin.

- 1964 : La théorie des équations aux dérivées partielles.
  Editions scientifiques, Pékin.

  Constitue un exemple fascinant de *style tardif* en mathématiques :

- 1964 : La théorie des équations aux dérivées partielles. *Editions scientifiques, Pékin.*

  Constitue un exemple fascinant de *style tardif* en mathématiques :

  ... a series of relatively discrete but highly wrought fragments or episodes...

- 1964 : La théorie des équations aux dérivées partielles.
  Editions scientifiques, Pékin.

  Constitue un exemple fascinant de *style tardif* en mathématiques :

  ... a series of relatively discrete but highly wrought fragments or episodes...

  His late works are a form of exile from his milieu.

- 1964 : La théorie des équations aux dérivées partielles. *Editions scientifiques, Pékin.*

  Constitue un exemple fascinant de *style tardif* en mathématiques :

  ... a series of relatively discrete but highly wrought fragments or episodes...

  His late works are a form of exile from his milieu.

  Edward Said : Thoughts on Late Style. *London Review of Books, Vol. 26, no. 15, 5 August 2004.*

- Longue vie !

- Longue vie !
- *Pour inventer, il faut penser à côté, c'est-à-dire qu'il est important pour celui qui veut découvrir de ne pas se confiner à un seul chapitre de la science, mais de se tenir au courant de divers autres.*

- Longue vie !
- *Pour inventer, il faut penser à côté, c'est-à-dire qu'il est important pour celui qui veut découvrir de ne pas se confiner à un seul chapitre de la science, mais de se tenir au courant de divers autres.*
- *Après avoir commencé un travail sur un certain ensemble de questions et voyant que plusieurs auteurs s'étaient mis à suivre cette direction, je l'ai souvent abandonnée et j'ai cherché quelque chose d'autre.*