

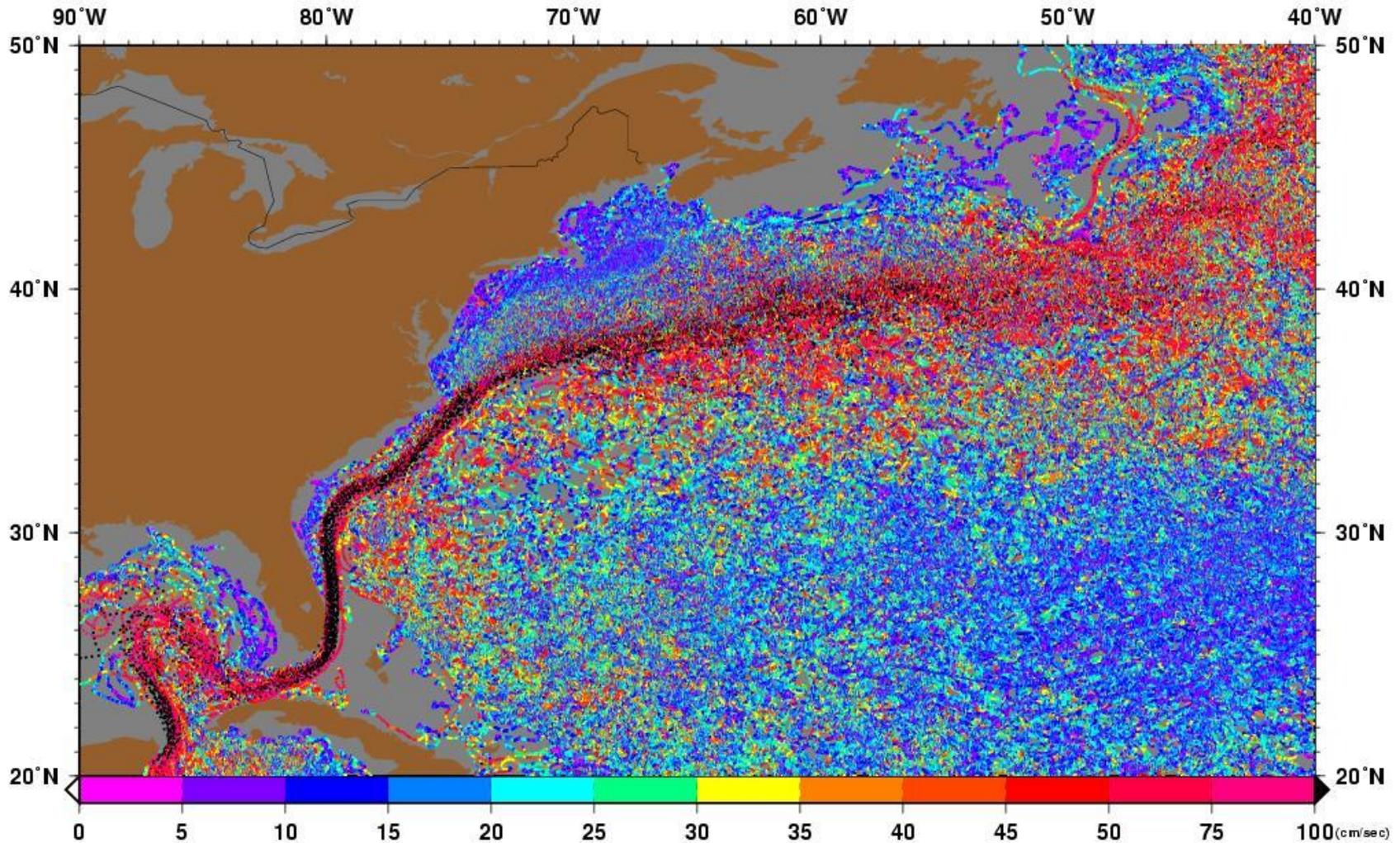
*Courants marins :  
un défi pour les mathématiciens*

**Laure Saint-Raymond**

IHES

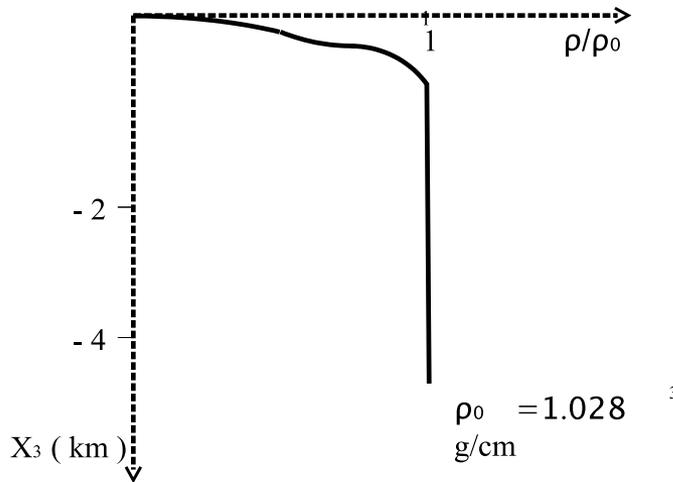
# Intensification des courants à l'Ouest

## Le cas du Gulf Stream



**Des équations ....  
dont on ne connaît pas les solutions!**

# L'eau, un fluide incompressible et faiblement visqueux

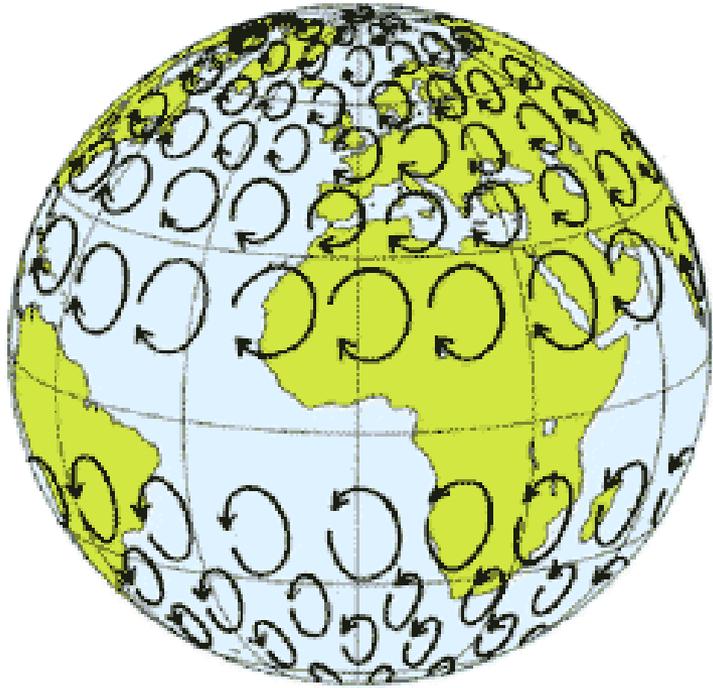


L'eau de mer est essentiellement **incompressible**, et homogène. La conservation de la masse implique que le flux est nul :

$$\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = 0.$$

La viscosité cinématique de l'eau est négligeable. On introduit une **viscosité turbulente**  $\nu$  pour modéliser la dissipation d'énergie (par les petits tourbillons).

## Référentiel terrestre et force de Coriolis



La force de Coriolis  $-2\rho_0\Omega \wedge u$  prend en compte la **rotation de la Terre** (repère non galiléen).

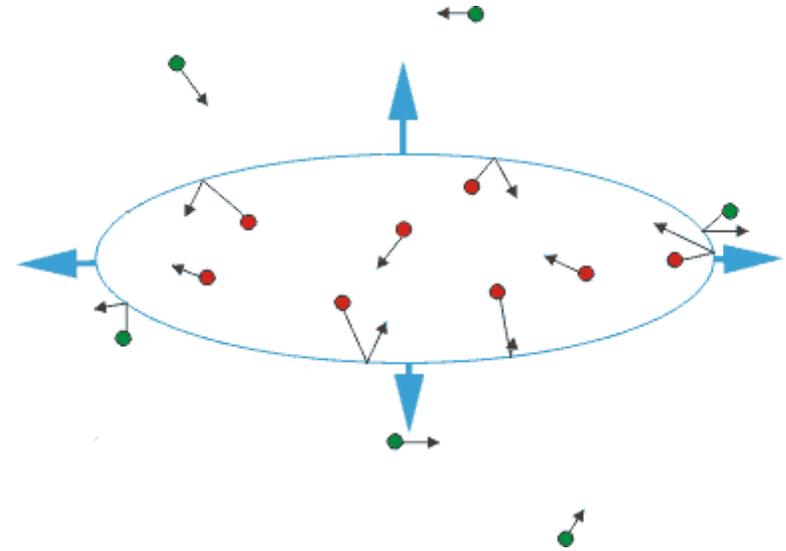
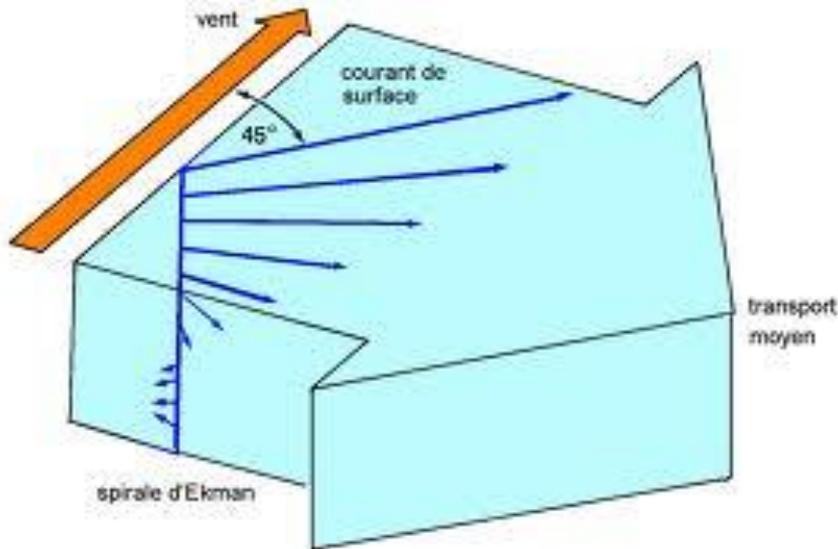
L'équation de **conservation de l'impulsion** s'obtient en suivant les trajectoires des particules

$$\partial_t u + \sum_i (u_i \partial_i) u + 2\Omega \wedge u = \frac{1}{\rho_0} \sum F.$$

# Forces dominantes pour la circulation globale

## Forces internes :

Pression, frottements visqueux...



## Forces extérieures :

Gravité, forçage par le vent (considéré comme connu en surface)...

## A RETENIR :

Le système de Navier-Stokes-Coriolis

$$\partial_t u_j + \sum_i (u_i \partial_i) u_j + 2(\Omega \wedge u)_j + \partial_j p = \nu \sum_i \partial_{ii}^2 u, \quad \sum_i \partial_i u_i = 0$$

ne peut pas être résolu explicitement. L'état actuel des connaissances ne permet même pas de dire qu'il a une **solution unique, stable par petite perturbation** (liée aux erreurs de mesure).

# Méthodes de séparation d'échelles

# Adimensionnement

Pour comprendre la phénoménologie d'un écoulement, on doit

- **adimensionner** les paramètres caractéristiques;
- comparer leurs **ordres de grandeur**;
- identifier les effets dominants.

Exemple : La circulation océanique planétaire est contrainte surtout par la rotation et la pression :

$$\partial_t u_j + \frac{1}{Ro} (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{u})_j + \partial_j p \sim 0.$$

## Moyennisation

Pour déterminer le mouvement macroscopique, on doit éliminer les variations sur des petites échelles

- soit en les décrivant et en les **filtrant**;
- soit en les **moyennant**.

Exemple : A faible nombre de Rossby, le mouvement se décompose en

- une partie rapidement oscillante (ondes de Poincaré)
- une partie moyenne, purement 2D (approximation géostrophique)

## Effets des petites échelles

Les petites échelles peuvent néanmoins influencer sur l'écoulement moyen.

- Les oscillations peuvent créer des **interférences** si elles sont couplées par un terme non linéaire:

$$\left\langle \sin \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \sin^2 \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \right\rangle = \frac{1}{2}.$$

- Les concentrations peuvent donner lieu à des **pertes d'énergie**:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{1}_{|x| \leq \varepsilon} \right\rangle \rightarrow 0, \quad \left\langle \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{1}_{|x| \leq \varepsilon} \right)^2 \right\rangle = 2.$$

## **A RETENIR :**

La structure de l'écoulement aux petites échelles (**oscillations/concentrations**) peut modifier considérablement le mouvement à grande échelle :  
Interférences d'ondes ( turbulence),  
Couches limites (phénomènes de pompage),...

# Les couches de Munk

# Un modèle 2D pour la circulation globale

- Pour un écoulement stationnaire, la somme des forces est nulle.

$$\begin{cases} \beta x_2 u_2 + \partial_1 p - \nu(\partial_{11}^2 + \partial_{22}^2)u_1 = \sigma_1, \\ -\beta x_2 u_1 + \partial_2 p - \nu(\partial_{11}^2 + \partial_{22}^2)u_2 = \sigma_2. \end{cases}$$

- Ce système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 est complété par une condition de bord. La condition d'arrêt s'écrit

$$u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = 0.$$

## Une équation différentielle d'ordre 4

Comme le champ de vitesses  $u$  est à divergence nulle, on introduit la **fonction de courant**

$$u_1 = \partial_2 \psi, \quad u_2 = -\partial_1 \psi.$$

On se ramène donc à étudier l'**EDP singulière**

$$\begin{aligned} \beta \partial_1 \psi - \nu (\partial_{11}^2 + \partial_{22}^2) \psi &= \tau \text{ dans } \Omega, \\ \psi|_{\partial\Omega} &= 0, \quad (n \cdot \nabla \psi)|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Pour simplifier, les calculs seront faits en 1D.

## La relation de Sverdrup

On veut décrire le comportement de  $\psi_\nu$  pour  $\nu \ll 1$

$$\beta \frac{d\psi}{dx} - \nu \frac{d^4\psi}{dx^4} = \tau$$

On s'intéresse à **la limite**  $\nu \rightarrow 0$

Dans un **sens faible**,  $\psi_\nu$  converge vers la solution de l'équation de Sverdrup :

$$\beta \frac{d}{dx_1} \bar{\psi} = \tau.$$

## Equation de couche limite

L'équation de Sverdrup n'est pas compatible avec les conditions de bord. On introduit une correction :

$$\psi_\nu \approx \bar{\psi} + \psi_\nu^{CL}.$$

- La couche limite **rattrape les conditions de bord.**

$$\psi_\nu^{CL}|_{x_1=0} = -\bar{\psi}|_{x_1=0}, \quad \frac{d}{dx_1} \psi_\nu^{CL}|_{x_1=0} = -\frac{d}{dx_1} \bar{\psi}|_{x_1=0}.$$

$$\psi_\nu^{CL}|_{x_1=1} = -\bar{\psi}|_{x_1=1}, \quad \frac{d}{dx_1} \psi_\nu^{CL}|_{x_1=1} = -\frac{d}{dx_1} \bar{\psi}|_{x_1=1}.$$

- Elle est **dominée par les effets visqueux**

$$\beta \frac{d}{dx_1} \psi_\nu^{CL} - \nu \frac{d^4}{dx_1^4} \psi_\nu^{CL} = 0.$$

## Dissymétrie Est/Ouest

L'épaisseur de la couche est donnée par le **scaling**

$$\psi_{\nu}^{CL}(x_1) = \psi^E \left( \frac{1 - x_1}{(\nu/\beta)^{1/3}} \right) + \psi^O \left( \frac{x_1}{(\nu/\beta)^{1/3}} \right)$$

- A l'Est, les solutions décroissantes sont de la forme

$$\psi^E(z) = \lambda \exp(-z).$$

- A l'Ouest, l'espace est de dimension 2

$$\psi^O(z) = \lambda_1 \exp(jz) + \lambda_2 \exp(j^2z).$$

**La condition de bord pour l'équation de Sverdrup est donc prescrite à l'Est.**

**Au-delà des calculs....**  
**L'analyse permet de décrire les cas**  
**pathologiques!**

## Dégénérescence Nord/Sud

Près des bords Nord et Sud, le terme de transport n'est pas singulier :

$$\beta \partial_1 \psi_\nu^{BL} - \nu \partial_2^4 \psi_\nu^{BL} = 0.$$

- La **taille** de la couche limite est différente

$$z = \frac{x_2 - x_2^0}{(\nu/\beta)^{1/4}}$$

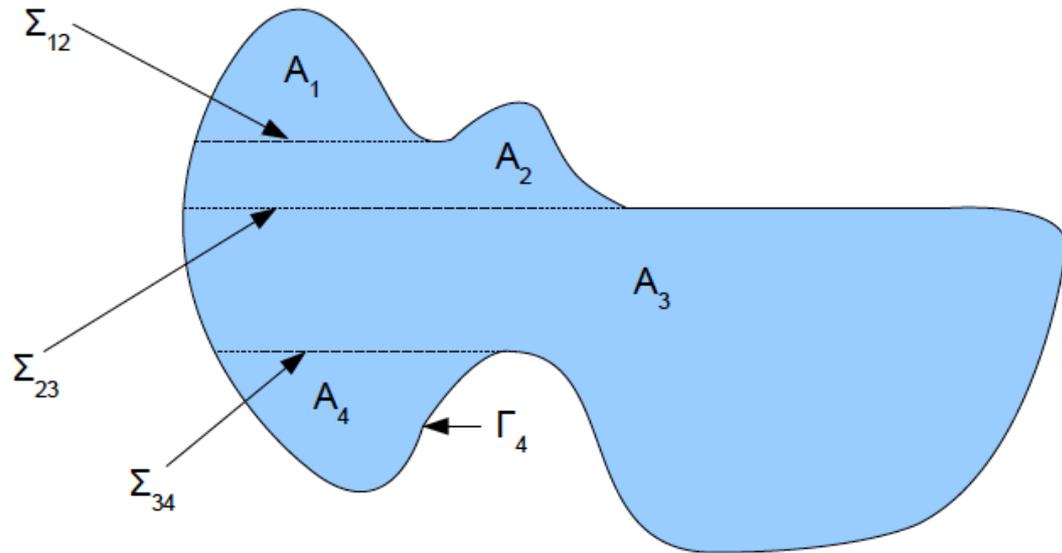
- L'équation de couche limite est **non locale** (de type parabolique)

**La propagation se fait d'Est en Ouest.**

## Zones de discontinuité

Dans un domaine non convexe, la solution de l'équation de Sverdrup est généralement discontinue (**condition de saut**).

Pour obtenir une approximation de  $\psi_\nu$



- une **régularisation** est nécessaire
- Le terme d'erreur est traité comme une **couche limite**

## Des transitions complexes...

Pas de raccord, mais une **superposition** :

- couches Est/Ouest localisées,
- extinction des couches Nord/Sud.

Construction à **partir du bord Est.**

