

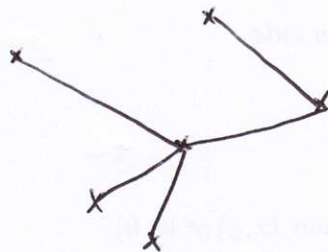
Exposé 21/01

Parcours : L3 Nag, M1 JH, M2 Agreg, M2 JH

Intro: M1 découverte théorie géom. des groupes
Etude d'un groupe par son action sur un espace.

- I. Arbre, automorphisme.
- II. Arbre régulier, coloriage.
- III. Action locale.
- IV. Groupe universel de Burger - Mozes.

I. Def: Un arbre $T = (S(T), A(T))$ est un graphe connexe, non vide, sans cycle, où $A(T) \subset \mathcal{D}_2(S(T))$



Def: Soit $T = (S(T), A(T))$ un arbre.

Un automorphisme de T est une bijection $\varphi: S(T) \rightarrow S(T)$

$$\text{t.q. } \{x, y\} \in A(T) \iff \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in A(T).$$

Prop: *. $\text{Aut}(T) = \{\varphi \text{ autom. de } T\}$ muni de la composition est un groupe.

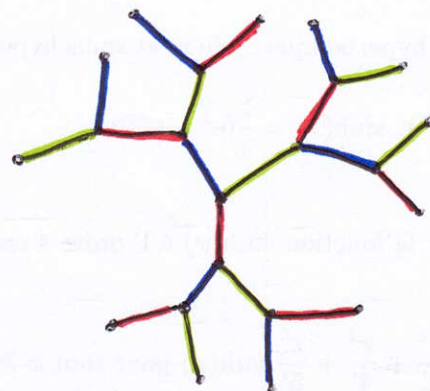
* G sous-groupe de $\text{Aut}(T)$ Alors G agit sur $S(T)$
par $\varphi \mapsto (x \mapsto \varphi(x))$ et sur $A(T)$ par

$$\varphi \mapsto (\{x, y\} \mapsto \{\varphi(x), \varphi(y)\}).$$

$$G \rightarrow \mathcal{G}(A(T))$$

II. Déf: 1 Soit T tq $S(T) = \mathbb{N}$.

L'arbre régulier de degré 3, ou arbre 3-régulier, noté T_3 , est l'arbre tq $S(T_3) = \mathbb{N}$ et le degré de chaque sommet vaut 3.



Déf: $c : A(T_3) \rightarrow [1, 3] = \{R, V, B\}$ est un coloriage si $\forall x \in S(T_3), c_x : V(x) \rightarrow [1, 3]$ est une bijection.

" $\{ \{x, y\}, y \in S(T_3) \text{ et } \{x, y\} \in A(T_3) \}$

III. Action locale

Soit T_3 muni de c :

(T_3, c) . Soit $\varphi \in \text{Aut}(T_3)$. Soit $x \in S(T_3)$.

$$V(x) \xrightarrow{\varphi} V(\varphi(x))$$

$$c_x \downarrow \quad \hookrightarrow \quad \downarrow c_{\varphi(x)}$$

$$[1, 3] \longrightarrow [1, 3]$$

$$\sigma_{\varphi, x}$$

$$\tau_{\varphi, x} = c_{\varphi(x)} \circ \varphi \circ c_x^{-1} \in \mathcal{G}_3.$$

Exemples !!

IV.

Soit Γ un sous-groupe de $\mathcal{G}_3$.

Def: le groupe universel de Burger-Prozes lié à Γ et à c est

$$\mathcal{U}^c(\Gamma) := \{\varphi \in \text{Aut}(T_3), \forall x \in S(T_3), \varphi_{\varphi, x} \in \Gamma\}.$$

Ex: Si $\Gamma = \mathcal{G}_3$, $\mathcal{U}^c(\Gamma) = \text{Aut}(T_3)$.

Si $\Gamma = \{\text{id}\}$: Soit $x_0 \in S(T_3)$.

$\varphi \in \mathcal{U}^c(\text{id})$ entièrement det. par l'image de x_0 .

$\hookrightarrow$ car $\mathcal{U}^c(\text{id})$ agit transitivement et
(une orbite)
librement sur $S(T_3)$.
(ts les stab sont triviaux)

Si $\Gamma = C_3$: Soit $\{x_0, y_0\}$ une arête.

$\varphi \in \mathcal{U}^c(C_3)$ entièrement det. par l'image de $\{x_0, y_0\}$.

$\hookrightarrow \mathcal{U}^c(C_3)$ agit transitivement et
librement sur $A(T_3)$.

Ccl: Ces groupes surgissent comme des groupes d'homéo de fractales.

$\hookrightarrow \text{act}^\circ$ cont. sur spet .