Points et zéro-cycles des variétés algébriques

Claire Voisin

CNRS, IMJ-PRG

Maths en herbe
21 janvier 2026

Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

Thm. *Soit $P = \alpha_d X^d + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{C}[X]$, avec $d > 0$, $\alpha_d \neq 0$. Alors*
(a) P admet une racine complexe λ, i.e. $P(\lambda) = 0$.
(b) On peut écrire $P = \alpha_d \prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)$.

Dém. de (a) $\Rightarrow$ (b). Par récurrence sur d. Une fois qu'on a une racine $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, on peut écrire par division euclidienne des polynômes $P = (X - \lambda_1)Q + R$, où R est une constante, en fait nulle car $R(\lambda_1) = 0$. (b) pour Q implique alors (b) pour P. **qed**

(a) n'est pas un énoncé d'algèbre, et toutes les preuves nécessitent des arguments d'analyse ou de topologie.

Dém. de (a). Supposons par l'absurde que P n'a pas de racine complexe. Donc $P(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors la fonction à valeurs réelles $f(z) := \frac{1}{|P(z)|}$ est continue sur $\mathbb{C}$. De plus, en regardant les croissances on voit que c'est une fonction cloche, i.e $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$. Donc la fonction f atteint un maximum. On conclut alors par un argument local au voisinage de ce maximum. **qed**

Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

Thm. *Soit* $P = \alpha_d X^d + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{C}[X]$*, avec* $d > 0$, $\alpha_d \neq 0$. *Alors*
(a) P *admet une racine complexe* λ*, i.e.* $P(\lambda) = 0$.
(b) On peut écrire $P = \alpha_d \prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)$.

Dém. de (a) $\Rightarrow$ (b). Par récurrence sur d. Une fois qu'on a une racine $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, on peut écrire par division euclidienne des polynômes $P = (X - \lambda_1)Q + R$, où R est une constante, en fait nulle car $R(\lambda_1) = 0$. (b) pour Q implique alors (b) pour P. **qed**

(a) n'est pas un énoncé d'algèbre, et toutes les preuves nécessitent des arguments d'analyse ou de topologie.

Dém. de (a). Supposons par l'absurde que P n'a pas de racine complexe. Donc $P(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors la fonction à valeurs réelles $f(z) := \frac{1}{|P(z)|}$ est continue sur $\mathbb{C}$. De plus, en regardant les croissances on voit que c'est une fonction cloche, i.e $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$. Donc la fonction f atteint un maximum. On conclut alors par un argument local au voisinage de ce maximum. **qed**

Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

Thm. *Soit $P = \alpha_d X^d + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{C}[X]$, avec $d > 0$, $\alpha_d \neq 0$. Alors*
(a) P admet une racine complexe λ, i.e. $P(\lambda) = 0$.
(b) On peut écrire $P = \alpha_d \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)$.

Dém. de (a) $\Rightarrow$ (b). Par récurrence sur d. Une fois qu'on a une racine $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, on peut écrire par division euclidienne des polynômes $P = (X - \lambda_1)Q + R$, où R est une constante, en fait nulle car $R(\lambda_1) = 0$. (b) pour Q implique alors (b) pour P. **qed**

(a) n'est pas un énoncé d'algèbre, et toutes les preuves nécessitent des arguments d'analyse ou de topologie.

Dém. de (a). Supposons par l'absurde que P n'a pas de racine complexe. Donc $P(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors la fonction à valeurs réelles $f(z) := \frac{1}{|P(z)|}$ est continue sur $\mathbb{C}$. De plus, en regardant les croissances on voit que c'est une fonction cloche, i.e $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$. Donc la fonction f atteint un maximum. On conclut alors par un argument local au voisinage de ce maximum. **qed**

Cas des corps arbitraires

Définition. *Si K est corps, un polynôme $P \in K[X]$ est* **irréductible** *sur K si on ne peut pas écrire $P = P_1 P_2$ avec $P_i \in K[X]$ de degré > 0.*

Théorème. *Si P est irréductible sur K, alors $K[X]/PK[X]$ est un corps qui est une extension de K de degré d.*

Dém. $K[X]/PK[X]$ est un anneau, qui est aussi une K-algèbre de dimension d sur K. Pour que ce soit un corps, il suffit de montrer que tout élément non nul $\overline{R} \in K[X]/PK[X]$ est inversible. Comme P irréductible et grâce à la division euclidienne (Bézout), on peut écrire $AR + BP = 1$ dans $K[X]$. Alors $\overline{A}$ est un inverse de $\overline{R}$ dans $K[X]/PK[X]$. **qed**

• Pour un polynôme $P \in K[X]$ général (normalisé) de degré d, on peut écrire $P = P_1^{s_1} \dots P_r^{s_r}$, où les P_i sont irréductibles normalisés de degré d_i.

• Les nombres s_i sont de nature géométrique, ce sont des **multiplicités**. Les nombres d_i sont de nature arithmétique. Ce sont les degrés des extensions $K[X]/P_iK[X]$ de K.

• On a $d = \sum_i d_i s_i$.

Cas des corps arbitraires

Définition. *Si K est corps, un polynôme $P \in K[X]$ est **irréductible** sur K si on ne peut pas écrire $P = P_1 P_2$ avec $P_i \in K[X]$ de degré > 0.*

Théorème. *Si P est irréductible sur K, alors $K[X]/PK[X]$ est un corps qui est une extension de K de degré d.*

Dém. $K[X]/PK[X]$ est un anneau, qui est aussi une K-algèbre de dimension d sur K. Pour que ce soit un corps, il suffit de montrer que tout élément non nul $\overline{R} \in K[X]/PK[X]$ est inversible. Comme P irréductible et grâce à la division euclidienne (Bézout), on peut écrire $AR + BP = 1$ dans $K[X]$. Alors $\overline{A}$ est un inverse de $\overline{R}$ dans $K[X]/PK[X]$. **qed**

- Pour un polynôme $P \in K[X]$ général (normalisé) de degré d, on peut écrire $P = P_1^{s_1} \dots P_r^{s_r}$, où les P_i sont irréductibles normalisés de degré d_i.

- Les nombres s_i sont de nature géométrique, ce sont des **multiplicités**. Les nombres d_i sont de nature arithmétique. Ce sont les degrés des extensions $K[X]/P_iK[X]$ de K.

- On a $d = \sum_i d_i s_i$.

Cas des corps arbitraires

Définition. *Si K est corps, un polynôme $P \in K[X]$ est* **irréductible** *sur K si on ne peut pas écrire $P = P_1 P_2$ avec $P_i \in K[X]$ de degré > 0.*

Théorème. *Si P est irréductible sur K, alors $K[X]/PK[X]$ est un corps qui est une extension de K de degré d.*

Dém. $K[X]/PK[X]$ est un anneau, qui est aussi une K-algèbre de dimension d sur K. Pour que ce soit un corps, il suffit de montrer que tout élément non nul $\overline{R} \in K[X]/PK[X]$ est inversible. Comme P irréductible et grâce à la division euclidienne (Bézout), on peut écrire $AR + BP = 1$ dans $K[X]$. Alors $\overline{A}$ est un inverse de $\overline{R}$ dans $K[X]/PK[X]$. **qed**

• Pour un polynôme $P \in K[X]$ général (normalisé) de degré d, on peut écrire $P = P_1^{s_1} \dots P_r^{s_r}$, où les P_i sont irréductibles normalisés de degré d_i.

• Les nombres s_i sont de nature géométrique, ce sont des **multiplicités**. Les nombres d_i sont de nature arithmétique. Ce sont les degrés des extensions $K[X]/P_iK[X]$ de K.

• On a $d = \sum_i d_i s_i$.

Variétés algébriques et leurs points

• Une variété algébrique affine X sur un corps K est un fermé algébrique de l'espace affine $\mathbb{A}_K^N$ défini par des polynômes $P_i \in K[X_1, \ldots, X_N]$ (satisfaisant certaines conditions : réduit, irréductible).

Définition. *un K-point de X est un N-uplet $x = (x_1, \ldots, x_N) \in K^N$ satisfaisant $P_i(x_1, \ldots, x_N) = 0$ pour tout i. Notation $x \in X(K)$.*

• On peut parler aussi de L-point de X pour tout surcorps $K \subset L$ (notation $X(L)$).

• Si l'extension $K \subset L$ est finie, on dit que x est un point fermé de X.

Définition. *Si $x \in X(L)$ est un point fermé de X, le degré de x est défini comme le degré de l'extension $K \subset L$.*

Définition. *Soit $Z \subset \mathbb{A}_K^N$ fermé algébrique de dimension 0, défini par un idéal $I \subset K[X_1, \ldots, X_N]$. On définit $\deg Z$ comme la dimension sur K de $K[X_1, \ldots, X_N]/I$.*

• Le degré de Z contient trois sortes d'informations. 1) le nombre de points de Z, 2) leurs multiplicités, 3) leur corps L de définition.

Variétés algébriques et leurs points

• Une variété algébrique affine X sur un corps K est un fermé algébrique de l'espace affine $\mathbb{A}_K^N$ défini par des polynômes $P_i \in K[X_1, \ldots, X_N]$ (satisfaisant certaines conditions : réduit, irréductible).

Définition. *un K-point de X est un N-uplet $x = (x_1, \ldots, x_N) \in K^N$ satisfaisant $P_i(x_1, \ldots, x_N) = 0$ pour tout i. Notation $x \in X(K)$.*

• On peut parler aussi de L-point de X pour tout surcorps $K \subset L$ (notation $X(L)$).

• Si l'extension $K \subset L$ est finie, on dit que x est un point fermé de X.

Définition. *Si $x \in X(L)$ est un point fermé de X, le degré de x est défini comme le degré de l'extension $K \subset L$.*

Définition. *Soit $Z \subset \mathbb{A}_K^N$ fermé algébrique de dimension 0, défini par un idéal $I \subset K[X_1, \ldots, X_N]$. On définit $\deg Z$ comme la dimension sur K de $K[X_1, \ldots, X_N]/I$.*

• Le degré de Z contient trois sortes d'informations. 1) le nombre de points de Z, 2) leurs multiplicités, 3) leur corps L de définition.

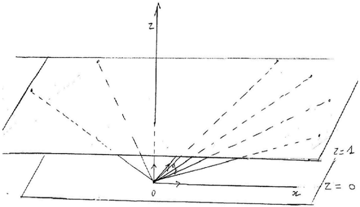
Géométrie projective

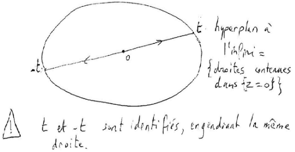
- Espace projectif $\mathbb{P}^N_K$= droites vectorielles dans K^{N+1}.
- Coordonnées $X_0, \ldots, X_N$ sur K^{N+1}.
- $\mathbb{P}^N_K$ contient l'espace affine

$\{X_0 = 1\} = \mathbb{A}^N_K = \{$ droites non contenues dans $X_0 = 0\}$

et aussi l'espace projectif

$\mathbb{P}^{N-1}_K = \{$ droites contenues dans $X_0 = 0\}$ ("hyperplan à l'infini").





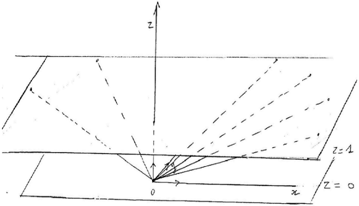
Géométrie projective

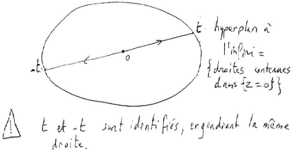
- Espace projectif $\mathbb{P}^N_K$= droites vectorielles dans K^{N+1}.
- Coordonnées $X_0, \ldots, X_N$ sur K^{N+1}.
- $\mathbb{P}^N_K$ contient l'espace affine

$\{X_0 = 1\} = \mathbb{A}^N_K = \{$ droites non contenues dans $X_0 = 0\}$

et aussi l'espace projectif

$\mathbb{P}^{N-1}_K = \{$ droites contenues dans $X_0 = 0\}$ ("hyperplan à l'infini").

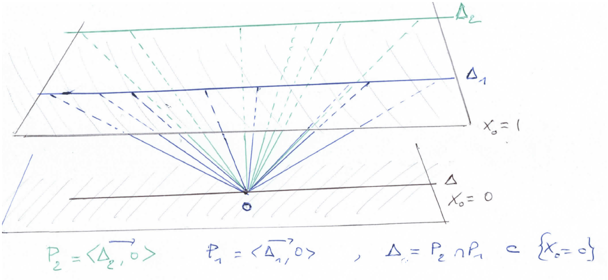




Géométrie projective, suite

• **Géométrie euclidienne** : *deux droites distinctes dans un plan sont parallèles ou se coupent en un seul point.*

• **Géométrie projective** : *deux droites distinctes dans un plan se coupent en un seul point. (Deux droites parallèles se rencontrent « à l'infini »).*



• Les plans vectoriels $P_i = \langle \Delta_i, 0 \rangle$ s'intersectent en une droite vectorielle $\Delta \subset \{X_0 = 0\}$.
• Le point de $\mathbb{P}^2$ correspondant à la droite Δ est le point d'intersection à l'infini de Δ_1 et Δ_2.

Polynômes homogènes

• Pour tout polynôme $P(z) = \sum_i \alpha_i z^i$, de degré d, on a un polynôme $P_{\text{hom}} := \sum_i \alpha_i X_0^{d-i} X_1^i$. P_{hom} restreint à $\{X_0 = 1\} = \mathbb{A}^1$ est P et P_{hom} ne s'annule pas à l'infini (le point $(0,1)$).

• L'espace des polynômes homogènes de degré d à 2 variables est isomorphe à l'espace des polynômes de degré $\leqslant d$ à une variable.

• Un polynôme $Q(z) = \alpha_{d'} z^{d'} + \dots$ de degré $d' < d$ a une homogénéisation $\alpha_{d'} X_0^{d-d'} X_1^{d'} + \dots$.... Outre les d' zéros de Q, il possède un zéro de multiplicité $d - d'$ en $X_0 = 0$ (le point à l'infini).

• Un polynôme homogène de degré d en $N+1$ variables et coefficients dans K ne définit pas une fonction sur $\mathbb{P}^N_K$ à valeurs dans K, car $P(\lambda x_0, \dots, \lambda x_N) = \lambda^d P(x_0, \dots, x_N)$.

• Cependant il définit un "fermé algébrique" $\{P = 0\} \subset \mathbb{P}^N_K$ qui dans chaque ouvert affine $X_i = 1$ est défini par le polynôme $P(X_0, \dots, 1, \dots X_N)$.

Polynômes homogènes

• Pour tout polynôme $P(z) = \sum_i \alpha_i z^i$, de degré d, on a un polynôme $P_{\text{hom}} := \sum_i \alpha_i X_0^{d-i} X_1^i$. P_{hom} restreint à $\{X_0 = 1\} = \mathbb{A}^1$ est P et P_{hom} ne s'annule pas à l'infini (le point $(0,1)$).

• L'espace des polynômes homogènes de degré d à 2 variables est isomorphe à l'espace des polynômes de degré $\leqslant d$ à une variable.

• Un polynôme $Q(z) = \alpha_{d'} z^{d'} + \dots$ de degré $d' < d$ a une homogénéisation $\alpha_{d'} X_0^{d-d'} X_1^{d'} + \dots$.... Outre les d' zéros de Q, il possède un zéro de multiplicité $d - d'$ en $X_0 = 0$ (le point à l'infini).

• Un polynôme homogène de degré d en $N+1$ variables et coefficients dans K ne définit pas une fonction sur $\mathbb{P}_K^N$ à valeurs dans K, car $P(\lambda x_0, \dots, \lambda x_N) = \lambda^d P(x_0, \dots, x_N)$.

• Cependant il définit un "fermé algébrique" $\{P = 0\} \subset \mathbb{P}_K^N$ qui dans chaque ouvert affine $X_i = 1$ est défini par le polynôme $P(X_0, \dots, 1, \dots X_N)$.

Le théorème de Bézout

Théorème. (Bézout) *Sur n'importe quel corps : soient $P(X,Y,Z)$, $Q(X,Y,Z)$ deux polynômes homogènes de degrés d_P et d_Q, définissant les courbes C_P, C_Q respectivement. On suppose que l'intersection $C_P \cap C_Q$ est de dimension 0. Alors le degré de $Z := C_P \cap C_Q$ est égal à $d_P d_Q$.*

- Cas $d_P = d_Q = 1$. Deux droites se rencontrent en un point.

Idée de la démonstration : calculer combien de conditions d'annulation impose Z aux polynômes homogènes de degré l avec l grand. Par définition, ce nombre est $\deg Z$. **qed**

Remarque. *Sur $\mathbb{C}$, on peut utiliser un argument topologique. Il suffit de montrer que le degré de $C_P \cap C_Q$ ne dépend pas du choix de C_P et C_Q. En effet, si on prend pour C_P l'union de d_P droites Δ_i et C_Q l'union de d_Q autres droites Δ'_j, on trouve $C_P \cap C_Q = \bigcup_{ij} \Delta_i \cap \Delta'_j$, soit $d_P d_Q$ points.*

Le théorème de Bézout

Théorème. (Bézout) *Sur n'importe quel corps : soient $P(X,Y,Z)$, $Q(X,Y,Z)$ deux polynômes homogènes de degrés d_P et d_Q, définissant les courbes C_P, C_Q respectivement. On suppose que l'intersection $C_P \cap C_Q$ est de dimension 0. Alors le degré de $Z := C_P \cap C_Q$ est égal à $d_P d_Q$.*

- Cas $d_P = d_Q = 1$. Deux droites se rencontrent en un point.

Idée de la démonstration : calculer combien de conditions d'annulation impose Z aux polynômes homogènes de degré l avec l grand. Par définition, ce nombre est $\deg Z$. **qed**

Remarque. *Sur $\mathbb{C}$, on peut utiliser un argument topologique. Il suffit de montrer que le degré de $C_P \cap C_Q$ ne dépend pas du choix de C_P et C_Q. En effet, si on prend pour C_P l'union de d_P droites Δ_i et C_Q l'union de d_Q autres droites Δ'_j, on trouve $C_P \cap C_Q = \bigcup_{ij} \Delta_i \cap \Delta'_j$, soit $d_P d_Q$ points.*

Points des courbes cubiques planes

Théorème. *Soit $E \subset \mathbb{P}^2$ une courbe de degré 3 lisse définie sur un corps K. Si E a un point fermé z de degré d premier à 3, alors E a un K-point.*

Démonstration. Écrivons $d = 3d' - k$, où $k = 1, 2$. L'espace des polynômes homogènes $Q(X,Y,Z)$ de degré d' est de dimension $1 + \frac{(d')^2+3d'}{2}$. Le sous-espace des polynômes homogènes $Q(X,Y,Z)$ de degré d' qui s'annulent sur E est de dimension $1 + \frac{(d'-3)^2+3(d'-3)}{2} = 1 + \frac{(d')^2-3d'}{2}$.

Celui des polynômes homogènes de degré d' qui s'annulent sur z est de dimension $\geq 1 + \frac{(d')^2+3d'}{2} - 3d' + k = 1 + \frac{(d')^2-3d'}{2} + k$.

Donc il existe un polynôme homogène $Q(X,Y,Z)$ de degré d' qui s'annule sur z et pas sur E. Soit P_E l'équation définissant E. Par Bézout, le degré de l'intersection $Q = P_E = 0$ est $3d'$ et contient z, qui est de degré $3d' - k$.

Le "reste" de l'intersection $z' := \{Q = P_E = 0\} \setminus z$ est donc de degré k. Si $k = 1$ c'est un K-point de E. Si $k = 2$, il existe une droite Δ contenant z'. Alors $\Delta \cap E$ contient z' et est de degré 3. Le reste $\Delta \cap E \setminus z'$ est de degré 1 et est donc un K-point. **qed**

Points des courbes cubiques planes

Théorème. *Soit $E \subset \mathbb{P}^2$ une courbe de degré 3 lisse définie sur un corps K. Si E a un point fermé z de degré d premier à 3, alors E a un K-point.*

Démonstration. Écrivons $d = 3d' - k$, où $k = 1, 2$. L'espace des polynômes homogènes $Q(X,Y,Z)$ de degré d' est de dimension $1 + \frac{(d')^2+3d'}{2}$. Le sous-espace des polynômes homogènes $Q(X,Y,Z)$ de degré d' qui s'annulent sur E est de dimension $1 + \frac{(d'-3)^2+3(d'-3)}{2} = 1 + \frac{(d')^2-3d'}{2}$.

Celui des polynômes homogènes de degré d' qui s'annulent sur z est de dimension $\geq 1 + \frac{(d')^2+3d'}{2} - 3d' + k = 1 + \frac{(d')^2-3d'}{2} + k$.

Donc il existe un polynôme homogène $Q(X,Y,Z)$ de degré d' qui s'annule sur z et pas sur E. Soit P_E l'équation définissant E. Par Bézout, le degré de l'intersection $Q = P_E = 0$ est $3d'$ et contient z, qui est de degré $3d' - k$.

Le "reste" de l'intersection $z' := \{Q = P_E = 0\} \setminus z$ est donc de degré k. Si $k = 1$ c'est un K-point de E. Si $k = 2$, il existe une droite Δ contenant z'. Alors $\Delta \cap E$ contient z' et est de degré 3. Le reste $\Delta \cap E \setminus z'$ est de degré 1 et est donc un K-point. **qed**

Points des courbes cubiques planes

Théorème. *Soit $E \subset \mathbb{P}^2$ une courbe de degré 3 lisse définie sur un corps K. Si E a un point fermé z de degré d premier à 3, alors E a un K-point.*

Démonstration. Écrivons $d = 3d' - k$, où $k = 1, 2$. L'espace des polynômes homogènes $Q(X, Y, Z)$ de degré d' est de dimension $1 + \frac{(d')^2+3d'}{2}$. Le sous-espace des polynômes homogènes $Q(X, Y, Z)$ de degré d' qui s'annulent sur E est de dimension $1 + \frac{(d'-3)^2+3(d'-3)}{2} = 1 + \frac{(d')^2-3d'}{2}$.

Celui des polynômes homogènes de degré d' qui s'annulent sur z est de dimension $\geq 1 + \frac{(d')^2+3d'}{2} - 3d' + k = 1 + \frac{(d')^2-3d'}{2} + k$.

Donc il existe un polynôme homogène $Q(X, Y, Z)$ de degré d' qui s'annule sur z et pas sur E. Soit P_E l'équation définissant E. Par Bézout, le degré de l'intersection $Q = P_E = 0$ est $3d'$ et contient z, qui est de degré $3d' - k$.

Le "reste" de l'intersection $z' := \{Q = P_E = 0\} \setminus z$ est donc de degré k. Si $k = 1$ c'est un K-point de E. Si $k = 2$, il existe une droite Δ contenant z'. Alors $\Delta \cap E$ contient z' et est de degré 3. Le reste $\Delta \cap E \setminus z'$ est de degré 1 et est donc un K-point. **qed**

Points des courbes cubiques planes

Théorème. *Soit $E \subset \mathbb{P}^2$ une courbe de degré 3 lisse définie sur un corps K. Si E a un point fermé z de degré d premier à 3, alors E a un K-point.*

Démonstration. Écrivons $d = 3d' - k$, où $k = 1, 2$. L'espace des polynômes homogènes $Q(X, Y, Z)$ de degré d' est de dimension $1 + \frac{(d')^2+3d'}{2}$. Le sous-espace des polynômes homogènes $Q(X, Y, Z)$ de degré d' qui s'annulent sur E est de dimension $1 + \frac{(d'-3)^2+3(d'-3)}{2} = 1 + \frac{(d')^2-3d'}{2}$.

Celui des polynômes homogènes de degré d' qui s'annulent sur z est de dimension $\geq 1 + \frac{(d')^2+3d'}{2} - 3d' + k = 1 + \frac{(d')^2-3d'}{2} + k$.

Donc il existe un polynôme homogène $Q(X, Y, Z)$ de degré d' qui s'annule sur z et pas sur E. Soit P_E l'équation définissant E. Par Bézout, le degré de l'intersection $Q = P_E = 0$ est $3d'$ et contient z, qui est de degré $3d' - k$.

Le "reste" de l'intersection $z' := \{Q = P_E = 0\} \setminus z$ est donc de degré k. Si $k = 1$ c'est un K-point de E. Si $k = 2$, il existe une droite Δ contenant z'. Alors $\Delta \cap E$ contient z' et est de degré 3. Le reste $\Delta \cap E \setminus z'$ est de degré 1 et est donc un K-point. **qed**

Autour d'une conjecture de Cassels et Swinnerton-Dyer

Conjecture. (Cassels et Swinnerton-Dyer) *Soit $X \subset \mathbb{P}_K^{n+1}$ lisse sur K, (car. $K = 0$) admettant un point fermé de degré premier à 3. Alors X admet un K-point.*

• dimension $n = 1$, c'est le théorème précédent.

• dimension 2, Coray 1976

Thm. *Soit $X \subset \mathbb{P}_K^3$ lisse sur K, (car. $K = 0$) admettant un point fermé de degré premier à 3. Alors X a un point fermé de degré 1, 4 ou 10.*

• Voisin 2025 : *mêmes hypothèses $\Rightarrow$ X a un point fermé de degré 1 ou 4.*

(dim 3 et degré 4, Voisin 2025)

Thm. *Pour tout nombre impair N, il existe K_N et une quartique lisse dans $\mathbb{P}^4_{K_N}$ ayant un point fermé de degré N et pas de point de degré impair $< N$.*

• Pour les surfaces quartiques, ce théorème est une conséquence de Mumford (1968). En dimension 3, les hypersurfaces qu'on obtient sont "de Fano" et les arguments de Mumford ne s'appliquent pas.

Autour d'une conjecture de Cassels et Swinnerton-Dyer

Conjecture. (Cassels et Swinnerton-Dyer) *Soit $X \subset \mathbb{P}_K^{n+1}$ lisse sur K, (car. $K = 0$) admettant un point fermé de degré premier à 3. Alors X admet un K-point.*

- dimension $n = 1$, c'est le théorème précédent.

- dimension 2, Coray 1976

Thm. *Soit $X \subset \mathbb{P}_K^3$ lisse sur K, (car. $K = 0$) admettant un point fermé de degré premier à 3. Alors X a un point fermé de degré 1, 4 ou 10.*

- Voisin 2025 : *mêmes hypothèses $\Rightarrow$ X a un point fermé de degré 1 ou 4.*

(dim 3 et degré 4, Voisin 2025)

Thm. *Pour tout nombre impair N, il existe K_N et une quartique lisse dans $\mathbb{P}^4_{K_N}$ ayant un point fermé de degré N et pas de point de degré impair $< N$.*

- Pour les surfaces quartiques, ce théorème est une conséquence de Mumford (1968). En dimension 3, les hypersurfaces qu'on obtient sont "de Fano" et les arguments de Mumford ne s'appliquent pas.

Conjecture. (Cassels et Swinnerton-Dyer) *Soit $X \subset \mathbb{P}_K^{n+1}$ lisse sur K, (car. $K = 0$) admettant un point fermé de degré premier à 3. Alors X admet un K-point.*

• dimension $n = 1$, c'est le théorème précédent.

• dimension 2, Coray 1976

Thm. *Soit $X \subset \mathbb{P}_K^3$ lisse sur K, (car. $K = 0$) admettant un point fermé de degré premier à 3. Alors X a un point fermé de degré 1, 4 ou 10.*

• Voisin 2025 : *mêmes hypothèses $\Rightarrow$ X a un point fermé de degré 1 ou 4.*

(dim 3 et degré 4, Voisin 2025)

Thm. *Pour tout nombre impair N, il existe K_N et une quartique lisse dans $\mathbb{P}^4_{K_N}$ ayant un point fermé de degré N et pas de point de degré impair $< N$.*

• Pour les surfaces quartiques, ce théorème est une conséquence de Mumford (1968). En dimension 3, les hypersurfaces qu'on obtient sont "de Fano" et les arguments de Mumford ne s'appliquent pas.