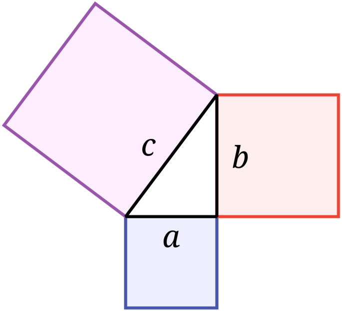
Formes cubiques

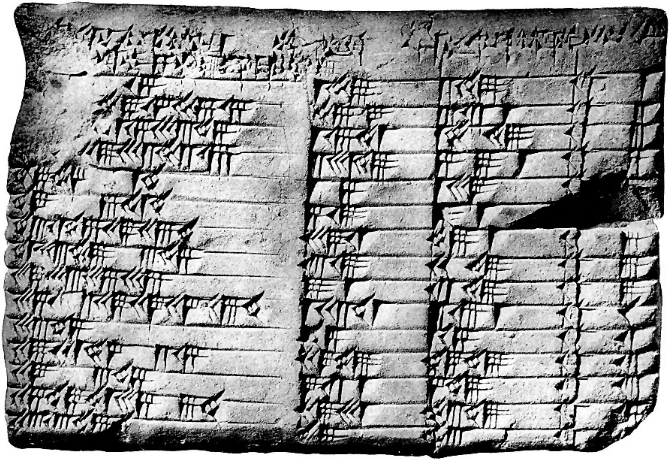
Egor Yasinsky, Lecteur Hadamard (CMLS)

Théorème de Pythagore — Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés : $a^2 + b^2 = c^2$.



Un triplet de Pythagore est un triplet (a, b, c) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$.

*All pictures are Wikimedia Commons



Plimpton 322 — la tablette d'argile babylonienne (1800 av. J.-C.) avec 15 triplets de Pythagore.

Nous commençons par le problème classique de trouver toutes les solutions entières $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

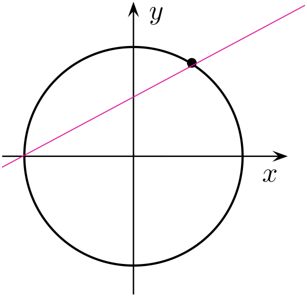
Ce problème est (presque) équivalent de trouver les solutions rationnelles de l'équation

$$x^2 + y^2 = 1,$$

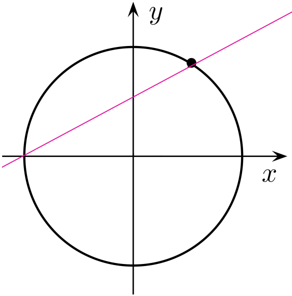
c'est-à-dire les points à coordonnées rationnelles de ce cercle.

Question : Comment trouver toutes les solutions de cette équation sur $\mathbb{Q}$?

- Soit $P_0 = (-1, 0)$. Toute autre solution $P = (x, y)$ définit une droite P_0P de pente rationnelle.



- Soit $P_0 = (-1, 0)$. Toute autre solution $P = (x, y)$ définit une droite P_0P de pente rationnelle.



- Inversement, toute droite $y = t(x+1)$ de pente t rationnelle passant par le point P_0 recoupe le cercle en un autre point:

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$$

et on trouve ses coordonnées

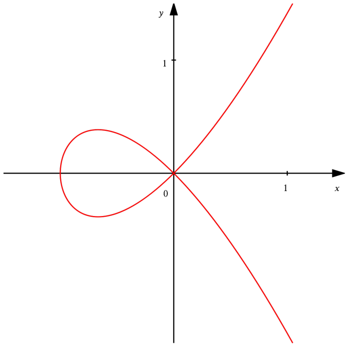
$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Deuxième exemple. Considérez la courbe algébrique

$$y^2 = x^2 + x^3.$$

Encore une fois, les coordonnées des points de cette courbe peuvent être exprimées en fractions $p(t)/q(t)$, où p et q sont polynômes en t.

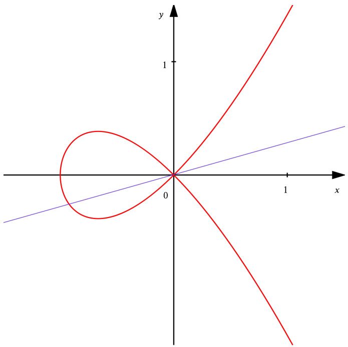
C'est-à-dire, cette courbe admet une paramétrisation rationnelle.



Dessiner une droite $y = tx$. Il y a deux points d'intersection :

$$y = tx, \quad y^2 = x^2 + x^3 \quad \Rightarrow \quad t^2x^2 = x^2 + x^3 \quad \Rightarrow \quad x^2(t^2 - x - 1) = 0$$

nos deux points : $\quad x = 0, \; y = 0 \;$ et $\; x = t^2 - 1, \; y = t(t^2 - 1)$.



Notre paramétrisation rationnelle est $(x(t), y(t)) = (t^2 - 1, t^3 - t)$.

Soit f un polynôme irréductible en x et y.

Définition

Une courbe algébrique $\mathcal{C}$

$$f(x, y) = 0$$

est unirationnelle si elle admet une paramétrisation rationnelle: il existe deux fonctions rationnelles $\varphi(t)$, $\psi(t)$ (pas toutes les deux constantes) telles que

$$f(\varphi(t), \psi(t)) = 0.$$

Exemple d'une courbe unirationnelle :

- Droites $(\deg f = 1)$ — évidemment.
- Coniques $(\deg f = 2)$ — la même méthode que ci-dessus.

Exemple d'une courbe rationnelle :

- Droites $(\deg f = 1)$ — évidemment.
- Coniques $(\deg f = 2)$ — la même méthode que ci-dessus.

Cubiques ?

Exemple d'une courbe rationnelle :

- Droites $(\deg f = 1)$ — évidemment.
- Coniques $(\deg f = 2)$ — la même méthode que ci-dessus.

Cubiques ?

- Nous avons vu que la courbe $y^2 = x^3 + x^2$ est unirationnelle.

Exemple d'une courbe rationnelle :

- Droites $(\deg f = 1)$ — évidemment.
- Coniques $(\deg f = 2)$ — la même méthode que ci-dessus.

Cubiques ?

- Nous avons vu que la courbe $y^2 = x^3 + x^2$ est unirationnelle.
- Cependant, il s'agit d'une situation exceptionnelle : en général, les courbes cubiques ne sont pas unirationnelles !

Interprétation algébrique

La théorie des corps

Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

où $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ est irréductible. Considérons les fonctions rationnelles

$$u(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

telles que q ne divise pas f. On dit que u est définie sur $\mathcal{C}$.

Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique

$$f(x,y) = 0,$$

où $f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ est irréductible. Considérons les fonctions rationnelles

$$u(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

telles que q ne divise pas f. On dit que u est définie sur $\mathcal{C}$.

- Par définition, $u_1 = u_2 \Leftrightarrow p_1 q_2 - p_2 q_1$ est divisible par f.

La théorie des corps

Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

où $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ est irréductible. Considérons les fonctions rationnelles

$$u(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

telles que q ne divise pas f. On dit que u est définie sur $\mathcal{C}$.

- Par définition, $u_1 = u_2 \Leftrightarrow p_1 q_2 - p_2 q_1$ est divisible par f.
- Toutes ces fonctions forment un corps des fonctions rationnelles de courbe $\mathcal{C}$, noté $\mathbb{K}(\mathcal{C})$.

La théorie des corps

Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

où $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ est irréductible. Considérons les fonctions rationnelles

$$u(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

telles que q ne divise pas f. On dit que u est définie sur $\mathcal{C}$.

- Par définition, $u_1 = u_2 \Leftrightarrow p_1 q_2 - p_2 q_1$ est divisible par f.
- Toutes ces fonctions forment un corps des fonctions rationnelles de courbe $\mathcal{C}$, noté $\mathbb{K}(\mathcal{C})$.

Exemple

Si $\mathcal{C}$ est une droite donnée par $y = 0$, alors $\mathbb{K}(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{K}(x)$.

Supposons que $\mathcal{C}$ est unirationnelle avec la paramétrisation

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t).$$

Alors pour chaque $u \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$, on obtient une fonction rationnelle en variable t :

$$u = \frac{p(x,y)}{q(x,y)} \rightsquigarrow \frac{p(\varphi(t),\psi(t))}{q(\varphi(t),\psi(t))}.$$

Il est facile de vérifier que nous obtenons un isomorphisme de $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ vers un sous corps de $\mathbb{K}(t)$:

$$\mathbb{K}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}(t).$$

Remarquez que les éléments de $\mathbb{K}$ sont envoyés sur eux-mêmes.

Théorème (Jacob Lüroth, 1875)

Soit $\mathbb{K}$ un corps, soit $\mathbb{K}(t)$ le corps de fractions rationnelles en une variable. Alors toute sous-extension de $\mathbb{K}(t)/\mathbb{K}$ différente de $\mathbb{K}$ est de la forme $\mathbb{K}(g(t))$ pour une certaine fraction rationnelle $g(t)$. Autrement dit, c'est aussi un corps de fractions rationnelles en une variable.

Jacob Lüroth (18 février 1844, Mannheim, Allemagne – 14 septembre 1910, Munich, Allemagne).

$$\mathbb{K}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}(t).$$

Conclusion : Si $\mathcal{C}$ est une courbe unirationnelle, alors $\mathbb{K}(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{K}(t)$.

Mais que signifie géométriquement le isomorphisme
$\mathbb{K}(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{K}(t)$?

Soit $\mathcal{C}$ une courbe unirationnelle. Par le théorème de Lüroth, $\mathbb{K}(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{K}(t)$.

Supposons que cet isomorphisme envoie x à $\varphi(t)$ et y à $\psi(t)$, alors nous obtenons la paramétrisation

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$$

de $\mathcal{C}$. En fait, cette paramétrisation a deux propriétés :

Mais que signifie géométriquement le isomorphisme
$\mathbb{K}(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{K}(t)$?

Soit $\mathcal{C}$ une courbe unirationnelle. Par le théorème de Lüroth, $\mathbb{K}(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{K}(t)$.

Supposons que cet isomorphisme envoie x à $\varphi(t)$ et y à $\psi(t)$, alors nous obtenons la paramétrisation

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t)$$

de $\mathcal{C}$. En fait, cette paramétrisation a deux propriétés :

- Pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ (avec un nombre fini d'exceptions) il existe $t_0 \in \mathbb{K}$ tel que $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$.

Mais que signifie géométriquement le isomorphisme $\mathbb{K}(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{K}(t)$?

Soit $\mathcal{C}$ une courbe unirationnelle. Par le théorème de Lüroth, $\mathbb{K}(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{K}(t)$.

Supposons que cet isomorphisme envoie x à $\varphi(t)$ et y à $\psi(t)$, alors nous obtenons la paramétrisation

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t)$$

de $\mathcal{C}$. En fait, cette paramétrisation a deux propriétés :

- Pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ (avec un nombre fini d'exceptions) il existe $t_0 \in \mathbb{K}$ tel que $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$.
- Pour chaque point de $\mathcal{C}$ (avec un nombre fini d'exceptions) une telle représentation est unique — l'exercice !

$\diamondsuit$ Pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ (avec un nombre fini d'exceptions) il existe $t_0 \in \mathbb{K}$ tel que $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$.

Supposons que le isomorphisme $\mathbb{K}(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{K}(t)$ envoie t à $\chi(x, y)$.

Alors

$$x = \varphi(\chi(x, y)), \quad y = \psi(\chi(x, y)), \quad t = \chi(\varphi(t), \psi(t)) \qquad \heartsuit$$

- Soit $\chi(x, y) = p(x, y)/q(x, y)$. Alors $\chi(x_0, y_0)$ est défini pour tous (x_0, y_0) tels que $q(x_0, y_0) \neq 0$, c'est à dire il existe un nombre fini d'exceptions.
- Supposons que $\chi(x_0, y_0)$ n'est pas égal aux zéros des dénominateurs de $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ — encore une fois, il existe un nombre fini d'exceptions.

Alors $\heartsuit \Rightarrow \diamondsuit$.

Conclusion

Théorème de Lüroth (une forme géométrique)

Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane définie par $f(x, y) = 0$ qui peut être paramétrée par des fonctions rationnelles :

$$t \mapsto (x(t), y(t)) \quad : \; f(x(t), y(t)) = 0.$$

Alors il existe un autre paramétrage

$$s \mapsto (x(s), y(s))$$

tel que $s \in \mathbb{K} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} (x, y) \in \mathcal{C}$, avec un nombre fini d'exceptions.

Application : description des points rationnels (par exemple, triplets de Pythagore).

à partir de maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

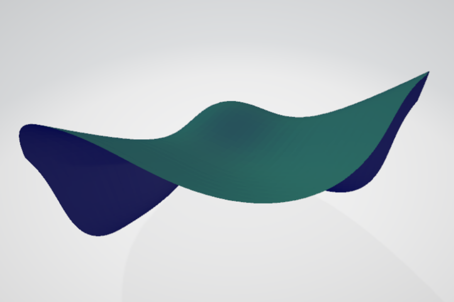
Généralisation :

- Au lieu de courbes, on peut considérer des hypersurfaces de dimensions supérieures, donnés par des équations

$$X : \quad F(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

où $F \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ est un polynôme irréductible.

Par exemple, voici la surface de Fermat $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 1$.



Généralisation :

- Au lieu de courbes, on peut considérer des hypersurfaces de dimensions supérieures, donnés par des équations

$$X : \quad F(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

où $F \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ est un polynôme irréductible.

Généralisation :

- Au lieu de courbes, on peut considérer des hypersurfaces de dimensions supérieures, donnés par des équations

$$X : \quad F(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

où $F \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ est un polynôme irréductible.

- Comme précédemment, on définit le corps des fonctions rationnelles $\mathbb{C}(X)$ sur une telle hypersurface.

Généralisation :

- Au lieu de courbes, on peut considérer des hypersurfaces de dimensions supérieures, donnés par des équations

$$X : \quad F(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

où $F \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ est un polynôme irréductible.

- Comme précédemment, on définit le corps des fonctions rationnelles $\mathbb{C}(X)$ sur une telle hypersurface.

- On dit que X est unirationnelle si $\mathbb{C}(X)$ est un sous corps de $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ et X est rationnelle si $\mathbb{C}(X) \simeq \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$.

Généralisation :

- Au lieu de courbes, on peut considérer des hypersurfaces de dimensions supérieures, donnés par des équations

$$X : \quad F(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

où $F \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ est un polynôme irréductible.

- Comme précédemment, on définit le corps des fonctions rationnelles $\mathbb{C}(X)$ sur une telle hypersurface.

- On dit que X est unirationnelle si $\mathbb{C}(X)$ est un sous corps de $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ et X est rationnelle si $\mathbb{C}(X) \simeq \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$.

- Alors, le Théorème de Lüroth dit que

> Si X est une courbe algébrique $F(x_1, x_2) = 0$, alors
> X est unirationnelle $\Leftrightarrow$ X est rationnelle.

Cela conduit au problème naturel —

Problème de Lüroth : Si X est unirationnelle, alors est-ce X rationnelle ?

Cela conduit au problème naturel —

Problème de Lüroth : Si X est unirationnelle, alors est-ce X rationnelle ?

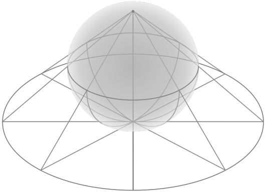
- Remarque 1 : On peut poser la même question pour des objets plus généraux – variétés algébriques sur tous les corps.

Cela conduit au problème naturel —

Problème de Lüroth : Si X est unirationnelle, alors est-ce X rationnelle ?

- Remarque 1 : On peut poser la même question pour des objets plus généraux – variétés algébriques sur tous les corps.
- Remarque 2 : le problème est non trivial pour X donné par F avec $\deg F > 2$. En effet, les hyperplans sont évidemment toujours rationnels.

  La rationalité des quadriques peut être facilement montrée en utilisant la projection stéréographique, comme nous le faisions avant.



Problème de Lüroth : Si X est unirationnelle, alors est-ce X rationnelle ?

Donc, le premier cas non trivial est une surface cubique

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \deg F = 3.$$

C'est déjà un problème très subtil !

École italienne de géométrie algébrique

Histoire : Dans la décade 1890 – 1900, Guido Castelnuovo et Federico Enriques développent la théorie générale des surfaces algébriques.

G. Castelnuovo

F. Enriques

Leurs résultats ont permis de répondre au problème de Lüroth pour surfaces.

Théorème (G. Castelnuovo, 1893)

Si S est une surface unirationnelle, alors elle est rationnelle.

C'est un résultat vraiment non trivial !

En fait, toutes les hypersurfaces cubiques lisses de dimension $\geqslant 2$ sur un corps algébriquement clos sont unrationnelles.

Exemple : dimension 2

La surface de Clebsch
$x^3+y^3+z^3+1=(x+y+z+1)^3$

Dans le cas où la surface cubique X est non singulière, on peut démontrer que si le corps de base est le corps des nombres complexes alors il y a exactement 27 droites sur cette surface cubique.

Alors la paramétrisation rationnelle est

$$L_1 \times L_2 \dashrightarrow X$$
$$(x_1, x_2) \mapsto X \cap \overline{x_1 x_2}.$$

Gino Fano (le 5 janvier 1871, Mantoue, — le 8 novembre 1952, Vérone) était un mathématicien italien. Il a travaillé en géométrie projective et en géométrie algébrique et il a fondé la théorie des variétés algébriques de dimension 3.

En 1908, 1915 et 1947 Fano fait des efforts pour prouver la non-rationalité de l'hypersurface cubique (lisse)

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \deg F = 3,$$

conjecturée depuis longtemps.

Malheureusement, l'analyse de Fano était incomplète.

La géométrie algébrique en dimension 3 est beaucoup plus subtile que celle des surfaces et les méthodes intuitives des géomètres italiens étaient insuffisantes et très souvent trompeuses.

La révolution

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES
SCIENTIFIQUES

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par A. GROTHENDIECK

Rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ

I

LE LANGAGE DES SCHÉMAS

1960

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES, N° 4

5, ROND-POINT BUGEAUD — PARIS (XVI[e])

À partir des années 50, les nouvelles méthodes (faisceaux, cohomologie...) révolutionnent la géométrie algébrique.

En utilisant ces méthodes, il a été possible de résoudre de nombreux problèmes classiques !

La miracle

Ainsi, en 1971, un miracle s'est produit : apparaissent presque simultanément 3 exemples indépendants de variétés* unirationnelles non rationnelles.

Clemens-Griffiths : la jacobienne intermédiaire

Théorème (Clemens-Griffiths, 1971)

L'hypersurface cubique (lisse) de dimension 3 est non rationnelle.

The intermediate Jacobian of the cubic threefold

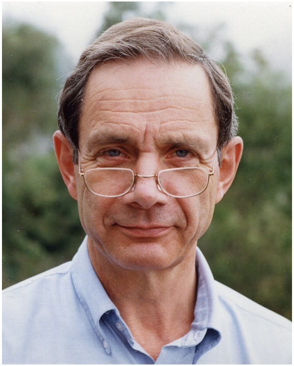
By C. Herbert Clemens and Phillip A. Griffiths

Table of Contents

Annals of Mathematics, Vol. 95, No. 2 (1972)

Artin-Mumford : torsion dans la cohomologie

— Un exemple spécifique d'une variété non-rationnelle (un revêtement double de $\mathbb{CP}^3$ ramifié le long d'une surface quartique trés particuliére).



Michael Artin

David Mumford

(photos by George Bergman)

Iskovskikh-Manin : rigidité birationnelle

Théorème (Iskovskikh-Manin, 1971)

L'hypersurface quartique (lisse) de dimension 3 est non rationnelle.

Vasily Iskovskikh

Yuri Manin[a]

(a) photo by Gert-Martin Greuel

La méthode d'Iskovskikh-Manin (inspirée de Fano) : regarder les symétries de notre hypersurface.

Rappel : j'ai prétendu que les courbes cubiques ne sont pas rationnelles (en général). **Pourquoi?**

Si X est une courbe rationnelle, alors $\mathbb{C}(X) \simeq \mathbb{C}(t)$. Tout $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{C}(X)$ est de la forme

$$\theta : t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

De plus, si θ a plus de 2 points fixes, alors $\theta = \mathrm{id}$.

Mais pour une courbe cubique lisse X, le corps $\mathbb{C}(X)$ ne satisfait pas cette propriété (explication géométrique : il existe un changement de coordonnées tel que X prend la forme $y^2 = x^3 + ax + b$, alors l'automorphisme $(x, y) \mapsto (x, -y)$ a au moins 3 points fixes)

Soit X une hypersurface (lisse)

$$X: \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \deg F = 4$$

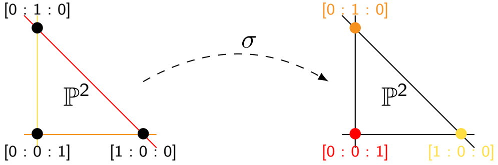
de dimension 3. Le résultat principal d'Iskovskikh-Manin implique que $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}(X)$ est un groupe fini.

D'autre part, le groupe $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}(t_1, t_2, t_3)$ est énorme — donc X n'est pas rationnelle !

Si X est une variété algébrique (par exemple, une hypersurface sur $\mathbb{K}$) on note $\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}\,\mathbb{K}(X)$.

Si X est rationnelle (par exemple $X = \mathbb{K}^n$) le groupe $\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}\,\mathbb{K}(t_1, \ldots, t_n)$ est appelé le groupe de Cremona de rang n.

$$\begin{array}{cccc} \sigma : & \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & [x:y:z] & \mapstochar\dashrightarrow & [yz:xz:xy]. \end{array}$$



Exemples de domaines reliés à ces groupes $\mathsf{Bir}(X)$

- Géométrie birationnelle
- Géométrie complexe, réelle, en caractéristique positive
- Dynamique
- Théorie géométrique des groupes
- Catégories dérivées, méthodes motiviques

Problème : Soit X une hypersurface (lisse) cubique

$$X: \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \deg F = 3$$

de dimension **4**. Est-elle *toujours* rationnelle ?

Ce problème est ouvert !

Merci !