

Du billard à la
combinatoire...

1. Boules aléatoires

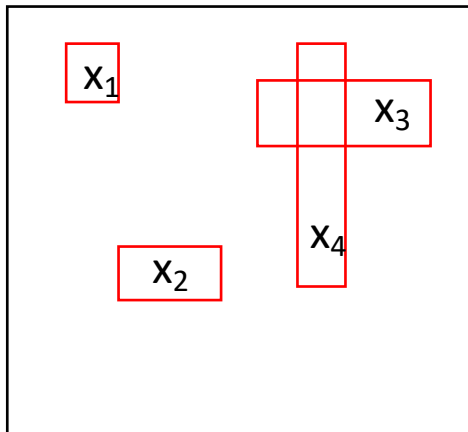
Points aléatoires dans le tore

La probabilité d'une configuration aléatoire de N points $(x_1, \dots, x_N)$ est donnée par la mesure uniforme.

Si on note

$$A_N = \{(x_1, \dots, x_N) / \text{pour tout } i, a_i < x_i < a_i + da_i\}$$

$$\text{Alors } \mathbf{P}(A_N) = da_1 da_2 \dots da_N$$



Le nombre de points N peut être aussi aléatoire.

On considère le cas où N est donné par une loi de Poisson

$$\mathbf{P}(N = n) = e^{-\mu} \cdot \mu^n / n!$$

Le nombre N de particules peut fluctuer mais sa moyenne μ est fixée. Une fois que N est choisi, la distribution de configurations est donnée par la mesure uniforme.

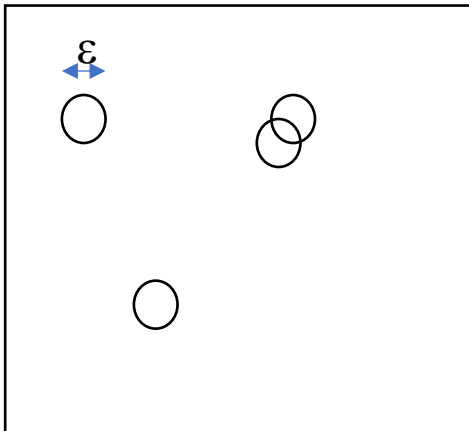
En physique statistique, on parle alors d'ensemble grand canonique.

Boules aléatoires dans le tore

Une configuration de N boules est caractérisée par leurs centres $(x_1, \dots, x_N)$ qui sont N points du tore comme précédemment.

La différence majeure est que les boules ne peuvent pas se superposer.

Ceci impose de fortes « contraintes d'exclusion » sur les centres.



Une configuration non admissible

La loi de probabilité dans l'ensemble canonique est donnée par

$$\mathbb{P}(A_N) = \frac{1}{Z_N} \int_{A_N} \prod_{i \neq j} \mathbf{1}_{|x_i - x_j| \geq \varepsilon} dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

Dans l'ensemble grand canonique, on a une formule similaire pour la distribution

$$\frac{1}{Z_\mu} \frac{\mu^n}{n!} \prod_{i \neq j} \mathbf{1}_{|x_i - x_j| \geq \varepsilon} dx_1 \dots dx_n$$

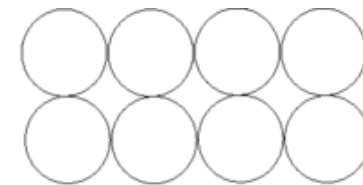
La constante de normalisation Z_N (resp. Z_μ) est appelée fonction de partition.

Scalings

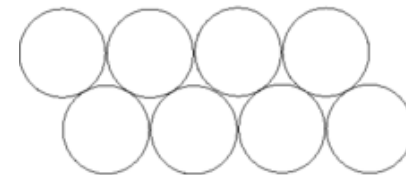
Le comportement de la densité de probabilité dépend fortement des tailles relatives des paramètres N (or μ) et ε .

Le volume de chaque particule est $C_d \cdot \varepsilon^d$ où C_d est
Le volume de la boule unité en dimension d .

- Si $N \cdot C_d \cdot \varepsilon^d$ est plus grand que 1, l'ensemble des configurations admissibles est vide!
- Si $N \cdot C_d \cdot \varepsilon^d$ est de l'ordre de (mais plus petit que) 1, on a un problème de conditionnement.
- Si $N \cdot C_d \cdot \varepsilon^d$ est beaucoup plus petit que 1, on a un régime dilué:
La contrainte d'exclusion est faible, et on s'attend à ce que la densité de probabilité se comporte presque comme la mesure uniforme.
=> Cette intuition est-elle correcte?



Loose packing of sand grains



More compact packing

2. Clusters

Développement de l'exclusion

En régime dilué, on s'attend à ce que l'exclusion soit une « petite » correction.
Il est donc naturel d'écrire

$$\mathbf{1}_{|x_i - x_j| \geq \varepsilon} = 1 - \mathbf{1}_{|x_i - x_j| < \varepsilon} := 1 - \mathbf{1}_{i \sim j}$$

L'exclusion totale peut alors se développer comme suit

$$\begin{aligned} \prod_{i \neq j} \mathbf{1}_{|x_i - x_j| \geq \varepsilon} &= 1 - \sum_{(i,j)} \mathbf{1}_{i \sim j} + \sum_{(i_1, j_1)} \sum_{(i_2, j_2)} \mathbf{1}_{i_1 \sim j_1} \mathbf{1}_{i_2 \sim j_2} \\ &\quad - \sum_{(i_1, j_1)} \sum_{(i_2, j_2)} \sum_{(i_3, j_3)} \mathbf{1}_{i_1 \sim j_1} \mathbf{1}_{i_2 \sim j_2} \mathbf{1}_{i_3 \sim j_3} + \dots \end{aligned}$$

Mais ce n'est pas un bon développement car certaines conditions de petitesse sont redondantes (par exemple si $i_1 = i_2$, $i_3 = j_1$, $j_2 = j_3$) et ce n'est pas vrai que

$$\int \mathbf{1}_{i_1 \sim j_1} \mathbf{1}_{i_2 \sim j_2} \mathbf{1}_{i_3 \sim j_3} dX_N = O(\varepsilon^{3d})$$

Développement en clusters

Un meilleur ordonnancement des termes est obtenu en développant le logarithme de la fonction de partition grand canonique

$$\log \mathcal{Z}_\mu = \sum_{n \geq 0} \frac{\mu^n}{n!} \int \varphi_n(x_1, \dots, x_n) dX_n$$

où le cumulante d'ordre n est défini par

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ \sum_{G \in \mathcal{C}_n} \prod_{(i,j) \in E(G)} (-1_{i \sim j}) & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

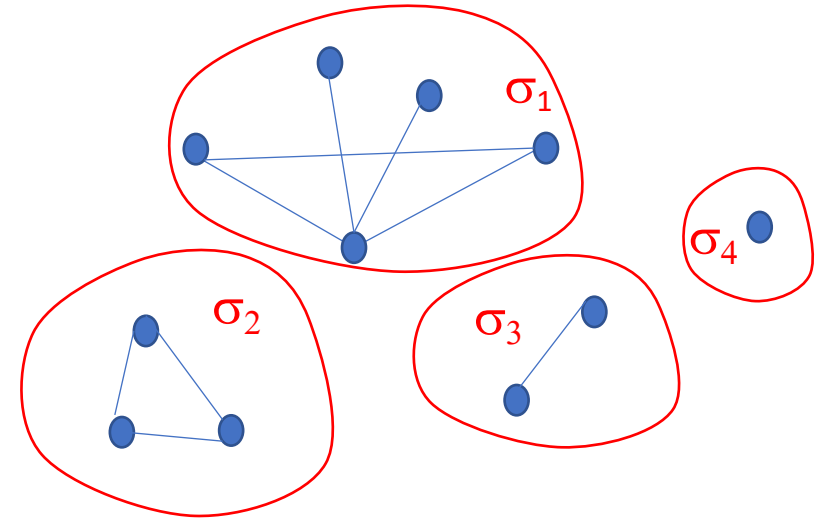
avec $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des graphes connexes de sommets $1, 2, \dots, n$, $E(G)$ l'ensemble des arêtes d'un tel graphe G .

NB : dans cette représentation, la taille du cumulante d'ordre n est exactement $O(\varepsilon^{d(n-1)})$, car on peut construire une chaîne de n contraintes « indépendantes ».

Représentation en graphes

Par définition,

$$\mathcal{Z}_\mu = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^n}{n!} \int \sum_{G \in \mathcal{G}_n} \prod_{(i,j) \in E(G)} (-1_{i \sim j}) dX_n$$



En décomposant chaque graphe G en k composantes connexes,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\mu &= 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k \leq n} \frac{1}{k!} \sum_{m_1 + \dots + m_k = n} \frac{\mu^{m_1 + \dots + m_k}}{m_1! \dots m_k!} \prod_{l=1}^k \left(\int \sum_{G \in \mathcal{C}_{m_l}} \prod_{(i,j) \in E(G)} (-1_{i \sim j}) dX_{m_l} \right) \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \prod_{l=1}^k \left(\sum_{m_l} \frac{\mu^{m_l}}{m_l!} \int \sum_{G \in \mathcal{C}_{m_l}} \prod_{(i,j) \in E(G)} (-1_{i \sim j}) \right) \end{aligned}$$

3. Arbres

La « tree inequality »

Pour donner un sens au développement en séries, il faut contrôler la croissance des cumulants en n . La « tree inequality » de Penrose donne

$$|\varphi_n(x_1, \dots, x_n)| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_n} \prod_{(i,j) \in E(T)} 1_{i \sim j}$$

où $\mathcal{T}_n$ est l'ensemble des graphes minimalement connexes (i.e. des arbres).

La cardinalité de $\mathcal{T}_n$ est donnée par la formule de Cayley (qui peut être montrée par récurrence)

$$|\mathcal{T}_n| = n^{n-2}.$$

La formule de Stirling montre que $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

=> La série des cumulants est absolument convergente dès que $\mu \varepsilon^d \ll 1$

Le schéma de partition en arbres

On définit un schéma de partition en arbres, i.e. une projection $\pi : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$ telle que pour tout arbre T ,

$$\pi^{-1}(\{T\}) = \{G \in \mathcal{C}_n / E(T) \subset E(G) \subset E(R(T))\}.$$

Soit G un graphe connexe avec n sommets,

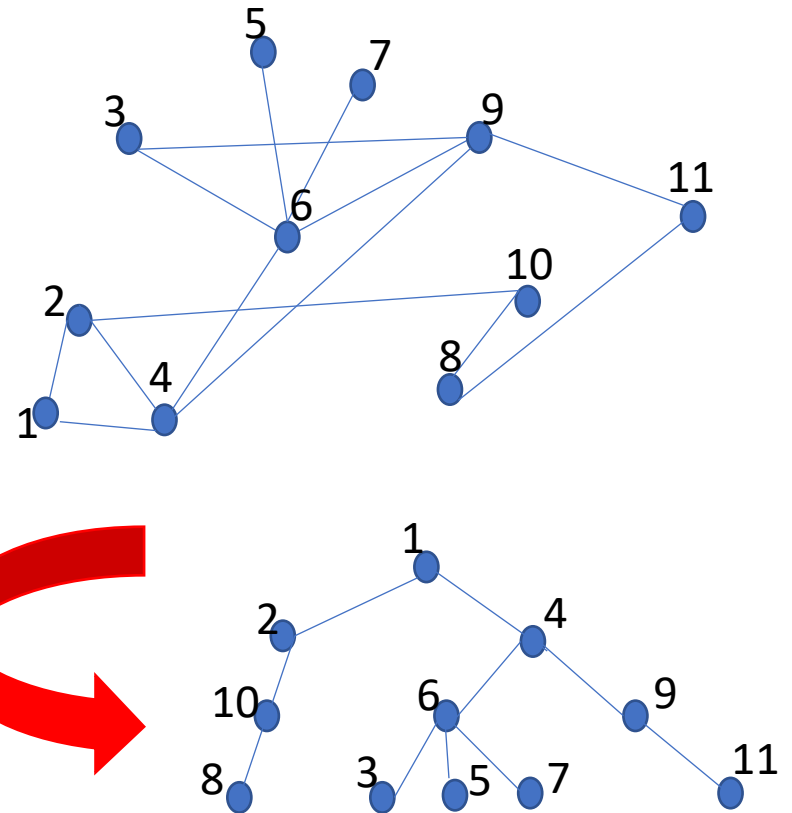
On définit son image de façon récursive :

- On fixe la racine, par exemple 1
- La première génération de T est l'ensemble de tous les sommets connectés à 1, notés $t_{1,1}, \dots, t_{1,r_1}$
- La seconde génération est l'ensemble de tous les sommets connectés à la première génération sans être déjà dans l'arbre, notés $t_{2,1}, \dots, t_{2,r_2}$

On garde seulement l'arête connectant

$t_{2,r}$ et $t_{1,r'}$ pour le plus petit r' possible.

- Les générations suivantes sont construites de la même façon...



Pour caractériser $R(T)$, on doit étudier les arêtes de G qui ont été écartées.

Soit $\{i,j\}$ une telle arête.

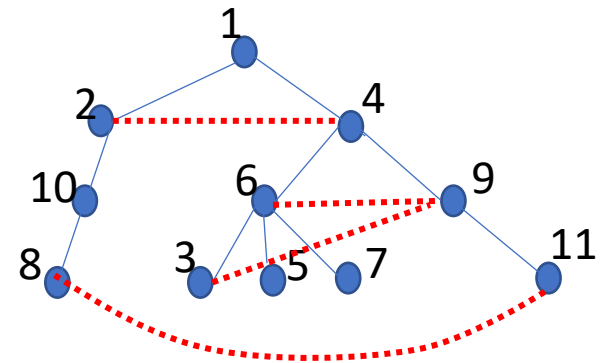
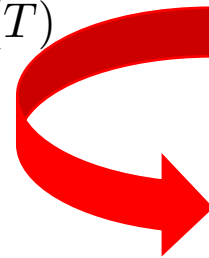
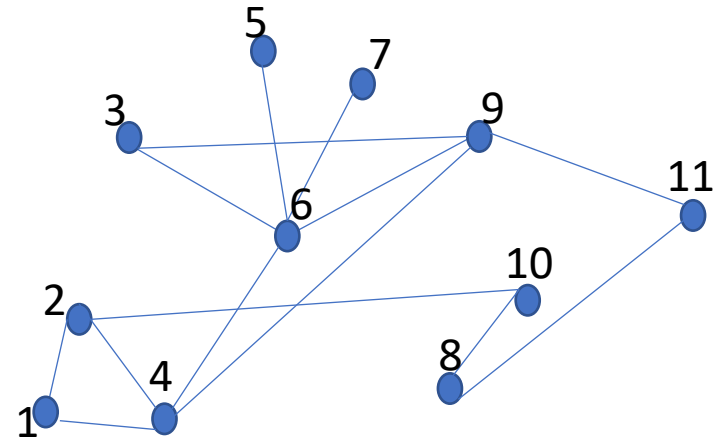
Sans perte de généralité, on peut supposer $d(i) \leq d(j)$

Par construction, $d(j) \leq d(i) + 1$.
(sinon on aurait gardé l'arête $\{i,j\}$.)

Si $d(j) = d(i) + 1$, alors le parent i' de j dans l'arbre est tel que $i' < i$.

Donc $E(G) \setminus E(T)$ est un sous-ensemble de $E'(T)$

- Arêtes à l'intérieur d'une génération
- Arêtes vers un oncle plus jeune



Inversement tout graphe tel que $E(T) \subset G \subset E(T) \cup E'(T)$

Appartient à $\pi^{-1}(\{T\})$. Donc $R(T)$ est le graphe d'arêtes $E(T) \cup E'(T)$.

Annulations

La partition de graphes G selon leurs projections $\pi(G)$ est la clé pour contrôler les cumulants.

$$\begin{aligned}
 \sum_{G \in \mathcal{C}_n} \prod_{\{i,j\} \in E(G)} (-1_{i \sim j}) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_n} \sum_{G \in \pi^{-1}(T)} \prod_{\{i,j\} \in E(G)} (-1_{i \sim j}) \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_n} \left(\prod_{\{i,j\} \in E(T)} (-1_{i \sim j}) \right) \left(\sum_{E' \subset E'(T)} \prod_{\{i,j\} \in E'} (-1_{i \sim j}) \right) \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_n} \left(\prod_{\{i,j\} \in E(T)} (-1_{i \sim j}) \right) \left(\prod_{\{i,j\} \in E'(T)} (1 - 1_{i \sim j}) \right).
 \end{aligned}$$

La conclusion vient du fait que $(1 - 1_{i \sim j})$ est plus petit que 1!

4. Boules et billard

Distribution des boules aléatoires

De l'identité

$$\begin{aligned}\log \mathcal{Z}_\mu &= \mu + \sum_{n \geq 2} \frac{\mu^n}{n!} \int dX_n \sum_{G \in \mathcal{C}_n} \prod_{(i,j) \in E(G)} (-1_{i \sim j}) \\ &= \mu \left(1 + \sum_{n \geq 2} O\left((e\mu\varepsilon^d)^{n-1} n^{-5/2}\right) \right)\end{aligned}$$

On déduit que même pour des gaz très dilués, la densité de probabilité des boules aléatoires est très singulière. La mesure de son support est négligeable comparée à la mesure analogue pour les points aléatoires!

L'analyticité par rapport au paramètre de dilution semble être perdue pour $\mu\varepsilon^d = 1/e$, ce qui correspond sans doute à une transition de phase.

Décroissance des corrélations

Les développements en clusters combinés avec la « tree inequality » donnent en fait beaucoup plus d'informations sur la distribution.

Par exemple, on montre que les corrélations décroissent exponentiellement

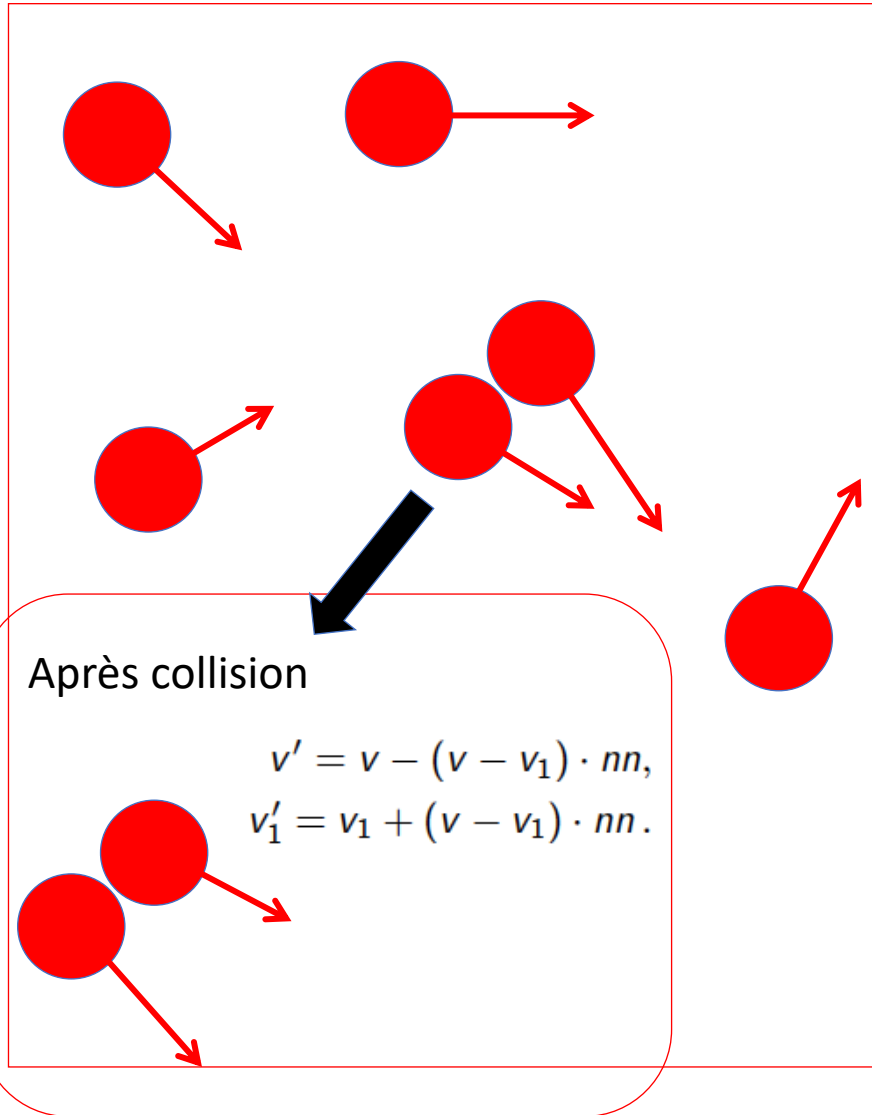
$$\begin{aligned} |\rho(x_1, x_2)| &\leq \sum_{n \geq 2} \frac{\mu^{n-2}}{(n-2)!} \int |\varphi_n(x_1, x_2, Y_{n-2})| dY_{n-2} \\ &\leq \sum_{n \geq 2} \frac{\mu^{n-2}}{(n-2)!} \int \sum_{T \in \mathcal{T}_n} \prod_{(i,j) \in E(T)} \mathbf{1}_{i \sim j} dY_{n-2} \end{aligned}$$

Cette expression fait intervenir une somme sur des arbres arbitrairement grands connectant x_1 et x_2 . Un tel arbre peut se décomposer en une ligne de $m+1$ arêtes qui connectent x_1 et x_2 , et $(m+2)$ arbres enracinés sur chacun de ces sommets. En prenant en compte les facteurs combinatoires, on obtient

$$|\rho(x_1, x_2)| \leq \mathbf{1}_{x_1 \sim x_2} + \sum_{m \geq 1} \mu^m \int dY_m \prod_{i=0}^m \mathbf{1}_{y_i \sim y_{i+1}} \text{ with } y_0 = x_1, \quad y_{m+1} = x_2$$

La contribution dominante est $(\mu \varepsilon^d)^m$ avec $m+1 > |x_1 - x_2|/\varepsilon$

Boules en mouvement



La dynamique combine du transport libre et des collisions élastiques.

- Définie pour presque toutes les configurations initiales
- Satisfait la récurrence de Poincaré sur des temps très longs
- Fortement instable donc difficile à prédire

Corrélations dynamiques

La mesure de Gibbs

$$\frac{1}{\mathcal{Z}_\mu} \frac{\mu^n}{n!} \prod_{1 \leq i \leq n} \exp\left(-\frac{\beta}{2}|v_i|^2\right) \prod_{i \neq j} \mathbf{1}_{|x_i - x_j| \geq \varepsilon} dx_1 dv_1 \dots dx_n dv_n$$

est invariante sous la dynamique.

Dans le scaling de Boltzmann-Grad

$$\mu \varepsilon^{d-1} = \lambda$$

pour une donnée initiale de la forme

$$\frac{1}{\mathcal{Z}_\mu} \frac{\mu^n}{n!} \prod_{1 \leq i \leq n} f_0(x_i, v_i) \prod_{i \neq j} \mathbf{1}_{|x_i - x_j| \geq \varepsilon} dx_1 dv_1 \dots dx_n dv_n$$

Lanford a montré que pour des temps courts, la mesure empirique

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i(t), v_i(t))}$$

converge vers la solution de l'équation de Boltzmann.

Proche de l'équilibre, on peut étudier les fluctuations de la mesure empirique

$$\sqrt{\mu} \left(\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i(t), v_i(t))} - M(v) \right)$$

Une série de travaux récents avec T. Bodineau, I. Gallagher and Sergio Simonella montre que dans la limite de Boltzmann-Grad limit, le champ de fluctuations converge

- Globalement en temps
- Vers un champ gaussien
- Avec une covariance régie par l'équation de Boltzmann linéarisée