Signatures de chemins pour le contrôle stochastique et les séries temporelles

Eduardo Abi Jaber*

Ecole Polytechnique, CMAP

Résumé

Le projet postdoctoral vise à poser les bases mathématiques et numériques d'une nouvelle génération de modèles sensibles à la mémoire, répondant à des défis fondamentaux dans les systèmes dynamiques stochastiques et l'analyse de séries temporelles dans des domaines variés tels que l'apprentissage automatique, les marchés de l'énergie et la finance quantitative. En s'appuyant sur la théorie des signatures de chemins et l'analyse stochastique, nous cherchons à capturer de manière systématique les effets de mémoire et les dépendances trajectorielles invisibles aux modèles traditionnels. Grâce au développement de nouvelles méthodes d'analyse stochastique et de contrôle, d'algorithmes numériques scalables et de validations empiriques, ce projet ambitionne de relier avancées théoriques profondes et applications concrètes dans la prise de décision sur séries temporelles.

1 Introduction

Les effets de mémoire jouent un rôle crucial dans de nombreux systèmes dynamiques. De nombreuses séries temporelles présentent des comportements dépendants de leur trajectoire, tels que des effets de mémoire longue/courte ou des relations de type *lead-lag*, qui ne peuvent être correctement modélisées par les approches markoviennes classiques. Comprendre et intégrer ces dépendances est essentiel pour construire des modèles plus réalistes, améliorer les prévisions et optimiser la prise de décision, en particulier dans des domaines comme l'économie, les marchés de l'énergie, la finance et la physique.

Les signatures de chemins, suite d'intégrales itérées, constituent un cadre prometteur et rigoureux pour capturer de tels effets de mémoire (voir Chevyrev and Kormilitzin (2016)). La *signature* d'un chemin continu (d'une semi-martingale) $X : [0,T] \to \mathbb{R}^d$, introduit par Chen (1957), encode l'information contenue dans la trajectoire via ses intégrales itérées. Pour chaque $n \geq 1$, la *signature d'ordre* n de X sur l'intervalle $[0,t]$ est définie par :

$$\mathbb{X}_t^n := \int_{0<u_1<\cdots<u_n<t} \circ dX_{u_1} \otimes \cdots \otimes \circ dX_{u_n}, \tag{1}$$

où $\circ$ désigne l'intégrale de Stratonovich et $\otimes$ le produit tensoriel. La signature complète est la collection

$$\mathbb{X}_t = (1, \mathbb{X}_t^1, \mathbb{X}_t^2, \mathbb{X}_t^3, \cdots),$$

qui vit dans l'algèbre tensorielle sur $\mathbb{R}^d$ et fournit une representation universelle et algébrique des chemins (voir Giusti, Lee, Nanda, and Oberhauser (2025); Cuchiero, Primavera, and Svaluto-Ferro (2025)). Les signatures de chemins possèdent des propriétés puissantes telles que l'universalité, l'injectivité (à équivalence arborescente près) et une riche structure algébrique, ce qui en fait des outils fondamentaux pour l'analyse des trajectoires et des processus stochastiques. Bien que ces propriétés aient été largement étudiées dans des cadres algébriques et géométriques (notamment en théorie des chemins rugueux Lyons, Caruana, and Lévy (2007)), leur usage en analyse stochastique appliquée reste encore limité.

Ce projet fait le pari d'aborder les signatures de chemins sous l'angle de l'analyse stochastique, en les positionnant comme des outils centraux d'analyse et de calcul pour les systèmes non-markoviens. Leur capacité

* *eduardo.abi-jaber@polytechnique.edu*

à encoder l'histoire d'un processus de manière hiérarchique, universelle et exploitable en fait un cadre particulièrement adapté aux contextes où les approches classiques échouent. Notre objectif est de démontrer que, au-delà de leurs propriétés mathématiques élégantes, les signatures offrent un cadre pratique et polyvalent pour le contrôle stochastique et l'analyse des séries temporelles dans le monde réel.

L'approche repose sur deux idées clées. D'une part, les signatures permettent de *capturer* et *résumer la mémoire* de manière rigoureuse, rendant possible l'usage d'outils markoviens dans un cadre infinidimensionnel. D'autre part, leur *propriété de linéarisation* joue un rôle analogue à celui des polynômes en analyse classique : elles permettent de linéariser des phénomènes trajectoriellement non linéaires de manière exploitable.

2 Contrôle stochastique avec signatures

Ce premier axe de recherche se concentre sur les signatures comme outil pour résoudre des problèmes de contrôle stochastique possiblement non linéaires et non-markoviens.

Une caractéristique clé des signatures de chemin est leur capacité à linéariser des fonctionnelles non linéaires de chemins. Nous cherchons à exploiter cela pour développer des solutions semi-explicites aux problèmes de contrôle optimal stochastique impliquant des dynamiques complexes et des contraintes, au-delà du cadre standard linéaire-quadratique. Ces problèmes de contrôle comprennent notamment la couverture optimale d'options dépendantes du chemin et l'allocation dynamique d'actifs sous frictions de marché.

En nous appuyant en particulier sur la formule d'Itô dans un cadre infinidimensionnel pour les signatures développée dans Abi Jaber, Gérard, and Huang (2024), notre approche reposera sur la caractérisation des stratégies optimales via des ODE de type Riccati en dimension infinie dans l'algèbre tensorielle. Ce type d'équations est récemment apparu dans le contexte de la tarification d'options (voir Abi Jaber and Gérard (2025)) et sort des cadres théoriques existants. Nous prévoyons de développer une théorie d'existence et d'unicité pour ces équations. De plus, des défis computationnels importants apparaissent pour résoudre ces équations numériquement, particulièrement si le processus sous-jacent X est défini dans un espace $\mathbb{R}^d$ de dimension élevée ($d \gg 1$). Des algorithmes et schémas numériques efficaces basés sur les tronquages et projections finis de la signature seront investigués. La convergence, la stabilité et (lorsque cela est possible) les vitesses de convergence seront analysées.

3 Séries temporelles avec signatures

Ce second axe de recherche se concentre sur le développement de modèles prenant en compte la mémoire pour les séries temporelles réelles en utilisant les méthodes de signature.

Fading-Memory Signatures. Dans un travail récent Abi Jaber and Sotnikov (2025), nous avons conçu un nouvel objet : la *fading-memory signature*, définie pour un chemin X et des paramètres de décroissance exponentielle $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \in \mathbb{R}_+^d$ par :

$$\mathbb{X}_t^{\boldsymbol{\lambda},n} := \int_{-\infty<u_1<\cdots<u_n<t} e^{-\boldsymbol{\lambda}(t-u_1)} \odot dX_{u_1} \circ \otimes \cdots \circ \otimes\, e^{-\boldsymbol{\lambda}(t-u_n)} \odot dX_{u_n}, \tag{2}$$

où $\odot$ désigne le produit Hadamard. Cette construction met l'accent sur l'histoire récente tout en réduisant l'importance des informations plus anciennes, s'alignant naturellement avec la mémoire décroissante et les dynamiques de type Volterra. Nous étudierons également les environnements multiscales, tels que les systèmes *lents-rapides*, pour comprendre comment la mémoire se comporte à travers des résolutions temporelles hétérogènes. Comparé aux signatures (1), ce nouvel objet est stationnaire et incorpore naturellement des phénomènes de mémoire à plusieurs échelles. Nous exploiterons notamment cet objet dans les applications suivantes :

— **Finance quantitative** : Etendre les théories classiques de portefeuille (par exemple, Markowitz (1952)) pour inclure les dépendances historiques, en utilisant la *fading-memory signature* pour améliorer la modélisation de la volatilité des actifs financiers et les prévisions de signaux.

— **Marchés de l'énergie** : Développer des modèles récursifs évolutifs pour la prévision conjointe de la consommation, des prix et de la génération renouvelable, avec une robustesse aux mises à jour en temps réel des données.

Références

Eduardo Abi Jaber and Louis-Amand Gérard. Signature volatility models : pricing and hedging with Fourier. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 16(2) :606–642, 2025.

Eduardo Abi Jaber and Dimitri Sotnikov. Exponentially fading memory signature. *arXiv preprint arXiv :2507.03700*, 2025.

Eduardo Abi Jaber, Louis-Amand Gérard, and Yuxing Huang. Path-dependent processes from signatures. *arXiv preprint arXiv :2407.04956*, 2024.

Kuo-Tsai Chen. Integration of paths, geometric invariants and a generalized Baker-Hausdorff formula. *Annals of Mathematics*, 65(1) :163–178, 1957.

Ilya Chevyrev and Andrey Kormilitzin. A primer on the signature method in machine learning. *arXiv preprint arXiv :1603.03788*, 2016.

Christa Cuchiero, Francesca Primavera, and Sara Svaluto-Ferro. Universal approximation theorems for continuous functions of cadlag paths and lévy-type signature models. *Finance and Stochastics*, pages 1–54, 2025.

Chad Giusti, Darrick Lee, Vidit Nanda, and Harald Oberhauser. A topological approach to mapping space signatures. *Advances in Applied Mathematics*, 163 :102787, 2025.

Terry J Lyons, Michael Caruana, and Thierry Lévy. *Differential equations driven by rough paths : Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXIV-2004*. Springer, 2007.

Harry Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1) :77–91, 1952. doi : 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.