

# Covariate-Driven Hawkes Processes: Asymptotic Guarantees, Bayesian Modelling, and Real-World Impact

*Pour postuler, veuillez envoyer un CV à [katarzyna.adamczyk@inrae.fr](mailto:katarzyna.adamczyk@inrae.fr) et [guillaume.konkamking@inrae.fr](mailto:guillaume.konkamking@inrae.fr)*

## Résumé

**Abstract (EN).** We will study a Hawkes process with time-varying baseline intensity influenced by dynamic covariates. The main objective of the postdoctoral project is to study the asymptotic properties of estimators in this model. We will work in a Bayesian framework, aiming for posterior contraction and, if possible, selection consistency under sparsity-inducing priors, while benefiting from natural uncertainty quantification.

Depending on the candidate's interests, methodological and computational developments can be pursued in parallel : model generalisations, scalable Bayesian inference (MCMC/VI), and reproducible software implementations. Applications will be considered in plant epidemiology (apple scab, grapevine downy mildew), on event-occurrence data, with validation by simulation and real-data studies.

This project has several attractions : it tackles open questions in asymptotics for Hawkes processes with covariates (consistency, asymptotic normality, posterior contraction, high dimension), at the interface between point processes, GLMs, and Bayesian statistics. It offers substantial flexibility : although the main focus is theoretical, methodological and computational developments and applications can be carried out according to the candidate's wishes. Supervision is multidisciplinary (INRAE/Inria), with regular interactions and openness to collaborations and co-supervision. Real datasets in plant epidemiology are available, with concrete practical impact for the rational management of inputs.

**Résumé (FR).** Nous proposons d'étudier un processus de Hawkes dont l'intensité de base varie avec des covariables temporelles. L'objectif principal du postdoctorat est l'étude des propriétés asymptotiques pour les estimateurs dans ce modèle. Nous nous placerons dans un cadre bayésien, où nous viserons la contraction a posteriori (et, si possible, la consistance de sélection) avec des priors parcimonieux, tout en bénéficiant d'une quantification d'incertitude naturelle.

Selon les intérêts du/de la candidat-e, des développements méthodologiques et computationnels pourront être menés en parallèle : généralisations du modèle, inférence bayésienne scalable (MCMC/VI) et implémentations logicielles reproductibles. Des applications seront envisagées en épidémiologie végétale (tavelure du pommier, mildiou de la vigne), sur des données d'occurrence d'événements, avec validation par simulation et études réelles.

Ce projet présente plusieurs attraits : il s'attaque à des questions ouvertes en asymptotique pour des processus de Hawkes avec covariables (consistance, normalité, contraction a posteriori, grande dimension), à l'interface des processus ponctuels, des GLM et de la statistique bayésienne. Il offre une grande flexibilité : bien que l'axe principal soit théorique, des développements méthodologiques et computationnels ainsi que des applications peuvent être menés selon les souhaits du/de la candidat·e. L'encadrement est pluridisciplinaire (INRAE/Inria), avec interactions régulières et ouverture à des collaborations et co-encadrements. Des jeux de données réelles en épidémiologie végétale sont disponibles, avec des retombées applicatives concrètes pour la gestion raisonnée des intrants.

## English version

**Context.** Hawkes processes (Hawkes, 1971) are popular mathematical tools used to model self-exciting phenomena. Typical applications include the occurrence of earthquakes, forest fires, criminal violence, financial transactions, and activity on social networks. The model is characterised by a conditional intensity function, which can be interpreted as the instantaneous rate of an event occurring in the near future, conditional on the past of the process. For the linear exponential Hawkes process, the intensity is, for all  $t \geq 0$ , given by :

$$\lambda_{\mu,\alpha,\beta}(t) = \mu + \alpha \sum_{t_i < t} \exp(-\beta(t - t_i)) \quad (1)$$

where the  $t_i$  denote the arrival times of events prior to time  $t$  ; the baseline intensity  $\mu > 0$  controls the dynamics of the process before the arrival of a first event ; the parameter  $\alpha > 0$  quantifies the strength of self-excitation ; and  $\beta > 0$  controls the rate at which the influence of an event decays over time.

The Hawkes process can be interpreted as an immigration–birth process (Hawkes and Oakes, 1974), where the arrival of immigrants is governed by a homogeneous Poisson process with intensity  $\mu$  and the arrival of their offspring is driven by the self-excitation term in model (1). In many applied contexts, the assumption of a constant baseline intensity in the classical model is unrealistic : events corresponding to the first generation of points do not occur spontaneously but are triggered by exogenous covariates which may themselves depend on time. A model that accounts for their influence is therefore a natural generalisation.

**Towards a covariate-dependent baseline intensity.** We propose to replace the assumption of constant  $\mu$  by a baseline intensity  $\mu_\theta(t) = g(x(t)^\top \theta)$ , where  $x(t) \in \mathbb{R}^p$  is a vector of observed covariates,  $\theta \in \mathbb{R}^p$  and  $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  is a link function (e.g., exp). The intensity becomes

$$\lambda_{\theta,\eta}(t) = \mu_\theta(t) + \sum_{t_i < t} \phi_\eta(t - t_i),$$

where, for the linear exponential Hawkes process,  $\phi_\eta(u) = \alpha e^{-\beta u} \mathbf{1}_{\{u>0\}}$  and  $\eta = (\alpha, \beta)$ . The log-likelihood on  $[0, T]$  is

$$\ell_T(\theta, \eta) = \sum_{t_i \leq T} \log \lambda_{\theta, \eta}(t_i) - \int_0^T \lambda_{\theta, \eta}(t) dt.$$

We assume stability of the process ( $\alpha < \beta$ ) and standard identifiability conditions (strictly increasing link  $g$ ; sufficient variability of the covariates (compatibility/identifiability conditions); regularity and bounds for  $x(\cdot)$ ).

**Frequentist framework ( $p$  fixed) : consistency and asymptotic normality.** Under correct specification and stationarity/ergodicity, the MLE  $(\hat{\theta}_T, \hat{\eta}_T)$  obtained by maximising  $\ell_T$  is expected to be consistent as  $T \rightarrow \infty$ , with asymptotic normality after appropriate normalisation, subject to standard regularity conditions on the log-likelihood and the Fisher information. This follows classical results for stationary point processes and should extend to Hawkes processes under stability ( $\alpha < \beta$ ); see the foundations (Ogata, 1978) and, see also, consistency results for regularised MLEs (Guo et al., 2018).

**Bayesian framework : practical advantages.** There are several good reasons to consider the Bayesian framework for studying the Hawkes model, and in particular its generalisation with a covariate-dependent baseline intensity.

- **Stabilising estimates** : informative or sparsity-inducing priors reduce estimator variance in low-signal situations or under strong correlation between covariates.
- **Natural uncertainty quantification** : the posterior distribution directly provides credible intervals and probabilities for events of interest, which is much harder to obtain in the frequentist framework, especially in high dimension.
- **A natural framework for probabilistic prediction** : predictions integrate parameter uncertainty, which is crucial for calibrated predictions that avoid overconfidence.
- **Model validation and selection** : tools such as marginal likelihood computation, Bayes factors, or prediction-based approaches (Bayesian cross-validation) are directly available.
- **Robust computational methods** : well-established MCMC algorithms and variational approaches enable estimation even in complex dependent models.

**Bayesian framework ( $p$  fixed) : posterior consistency.** In the classical approach (Ghosal and Van der Vaart, 2017), posterior consistency is obtained by verifying (i) adequate Kullback–Leibler support of the prior around the truth and (ii) the existence of exponentially powerful tests on separated neighbourhoods; general results then ensure contraction of the posterior distribution. For Hawkes processes, Bayesian inference is computationally well established (Rasmussen, 2013), and recent results rigorously establish posterior contraction (and even selection consistency for the Granger graph) in

multivariate versions (Sulem et al., 2024); these results provide a template for handling a covariate-dependent baseline intensity.

**High-dimensional setting ( $p = p_T \rightarrow \infty$ ) and variable selection.** When  $p$  is large, we assume a sparse structure ( $s_0 = \|\theta^*\|_0 \ll p$ ) and aim to recover the active covariates  $\text{supp}(\theta^*)$ . On the frequentist side, Lasso/SCAD-type penalties have been studied for point processes (including Hawkes), with oracle-type inequalities and compatibility/regularity conditions adapted to the martingale nature of the noise (Hansen et al., 2015; Fallahi et al., 2024). However, **frequentist uncertainty quantification is particularly difficult** in this setting, and bootstrap-type approaches are difficult to deploy owing to data dependence.

In the Bayesian framework, *variable selection* relies on sparsity-inducing priors (spike-and-slab, horseshoe, non-local priors) that combine a spike near zero (to set coefficients exactly to zero) and heavy tails (to avoid over-shrinkage of signals). This approach yields **natural uncertainty quantification**, even in high dimension, and can deliver near-optimal rates for estimation and prediction, as well as selection consistency under certain conditions (Castillo et al., 2015; Narisetty and He, 2014; Johnson and Rossell, 2012; van der Pas et al., 2016, 2017).

These high-dimensional guarantees are currently much more complete for regression (linear/GLM) than for parameter inference in Hawkes processes. A natural *road map* is therefore : (i) establish frequentist consistency and asymptotic normality for the model with a covariate-dependent baseline intensity in fixed dimension ; (ii) deduce *posterior contraction* in fixed dimension ; (iii) move to high dimension by imposing sparsity and using suitable priors, so as to obtain rates  $\sqrt{(s_0 \log p)/T}$  and, if possible, selection consistency.

**Application.** We consider an application of the model in plant epidemiology : apple scab, a fungal disease that attacks the fruit and leaves of apple trees, substantially reducing yields (Jankowski and Masny, 2019). Apple scab is caused by the fungus *Venturia inaequalis*. Its spores overwinter in the litter of fallen leaves from the previous year. In spring, when weather conditions are favourable, they detach and settle on trees, where they cause new infections. This is the optimal time to apply antifungal treatment ; hence, the challenge is to anticipate it precisely.

The event of interest here is the instant of spore release or, more precisely, the instant of spore detection by a sensor. We have a dataset of spore detections in an experimental orchard and meteorological variables recorded by a local weather station. The objective is to apply the Hawkes process to model the presence of spores, incorporating meteorological covariates. The first challenge is to select influential covariates, relying on the properties of Bayesian methods : their robustness to dependence, which is pervasive in meteorological data, and their effective handling of high dimensionality. Indeed, even if the initial number of weather variables considered is not very large, it is natural to broaden the collection by taking into account interactions and lagged effects of covariates over time, etc. The

model with selected variables could be used as a predictive tool for spore presence, to facilitate the rational management of plant-protection products.

We then plan to extend the application of the model to other cases in plant epidemiology, notably to study the spread of the fungus responsible for grapevine downy mildew. Even if the applied context is similar, the observed data are no longer times of occurrence but counts of events over time intervals of variable length. This feature requires the development of bespoke statistical methods.

**Datasets and partnerships.** Datasets of spore detections and meteorological series from an experimental orchard are available, with the possibility of extending to other sites/pathogens through collaborations within INRAE. These data will enable validation via simulation and on real data, and the calibration of operational scenarios.

**Required skills.**

- PhD in statistics ;
- Skills in Bayesian statistics and/or point processes would be an advantage.

**Environment and resources.** The postdoctoral researcher will work in a collaborative environment, with regular supervision and good practices for reproducible research (code review, open-source repositories). Active dissemination of results (preprints, submissions, presentations) is planned, as well as participation in workshops/summer schools and conferences as opportunities arise.

**Position description.** The position will be based within the MaIAGE unit (<https://maiage.inrae.fr>), at INRAE – Jouy-en-Josas Research Centre. Supervision will be provided by Guillaume Kon Kam King, INRAE Research Scientist ; Zacharie Naulet, INRAE Tenure-track Assistant Professor ; Madalina Deaconu, Inria Research Director, PASTA team ; and Katarzyna Adamczyk, INRAE Research Engineer.

**Contexte.** Les processus de Hawkes ((Hawkes, 1971)) sont des outils mathématiques très populaires, utilisés pour modéliser des phénomènes auto-excitants. Parmi les exemples typiques d'applications, on peut citer la survenue de tremblements de terre, les incendies de forêt, la violence criminelle, les échanges commerciaux et l'activité sur les réseaux sociaux. Le modèle est caractérisé par une fonction d'intensité conditionnelle qui s'interprète comme la probabilité infinitésimale d'observer un événement dans un avenir proche, conditionnellement au passé du processus. Pour le processus de Hawkes exponentiel linéaire, l'intensité est donnée, pour tout  $t \geq 0$ , par :

$$\lambda_{\mu,\alpha,\beta}(t) = \mu + \alpha \sum_{t_i < t} \exp(-\beta(t - t_i)) \quad (2)$$

où les  $t_i$  représentent les temps d'arrivée des événements avant le temps  $t$ , l'intensité de base  $\mu > 0$  contrôle la dynamique du processus avant l'arrivée d'un premier événement, le paramètre  $\alpha > 0$  quantifie la force d'auto-excitation et  $\beta > 0$  contrôle la vitesse à laquelle l'influence d'un événement décroît au cours du temps.

Le processus de Hawkes peut être interprété comme un processus d'immigration-naissance (Hawkes and Oakes, 1974) où l'arrivée des immigrants est gérée par le processus de Poisson homogène d'intensité  $\mu$  et l'arrivée de leur descendance est régie par le terme d'auto-excitation du modèle (2). Dans de nombreux contextes applicatifs, l'hypothèse d'intensité de base constante du modèle classique s'avère peu réaliste : les événements qui correspondent à la première génération de points n'arrivent pas de façon spontanée mais sont plutôt déclenchés par des covariables exogènes qui peuvent, elles aussi, dépendre du temps. Un modèle qui tiendrait compte de leur influence s'avère donc une généralisation intéressante.

**Vers une intensité de base dépendante de covariables.** Nous proposons de remplacer l'hypothèse  $\mu$  constante par une intensité de base  $\mu_\theta(t) = g(x(t)^\top \theta)$ , où  $x(t) \in \mathbb{R}^p$  est un vecteur de covariables observées,  $\theta \in \mathbb{R}^p$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  est une fonction de lien (e.g., exp). L'intensité devient

$$\lambda_{\theta,\eta}(t) = \mu_\theta(t) + \sum_{t_i < t} \phi_\eta(t - t_i),$$

où, pour le Hawkes exponentiel linéaire,  $\phi_\eta(u) = \alpha e^{-\beta u} \mathbf{1}_{\{u > 0\}}$  et  $\eta = (\alpha, \beta)$ . La log-vraisemblance sur  $[0, T]$  s'écrit :

$$\ell_T(\theta, \eta) = \sum_{t_i \leq T} \log \lambda_{\theta,\eta}(t_i) - \int_0^T \lambda_{\theta,\eta}(t) dt.$$

Nous supposons la stabilité du processus ( $\alpha < \beta$ ) et des conditions d'identifiabilité usuelles (lien  $g$  strictement croissant, variabilité suffisante des covariables (conditions de compatibilité/identifiabilité), régularité et bornes de  $x(\cdot)$ ).

**Cadre fréquentiste ( $p$  fixé) : consistance et normalité asymptotique.** Sous spécification correcte et stationnarité/ergodicité, le MLE  $(\hat{\theta}_T, \hat{\eta}_T)$  obtenu en maximisant  $\ell_T$  devrait être consistant lorsque  $T \rightarrow \infty$ , avec normalité asymptotique après renormalisation, moyennant des conditions de régularité standard sur la log-vraisemblance et l’information de Fisher. Ce schéma suivrait les résultats classiques pour les processus ponctuels stationnaires et devrait s’étendre aux processus de Hawkes sous stabilité ( $\alpha < \beta$ ) ; voir les fondations (Ogata, 1978) et éventuellement des résultats de consistance pour des MLE régularisés (Guo et al., 2018).

**Cadre bayésien : avantages pratiques.** Il existe plusieurs bonnes raisons d’envisager le cadre bayésien pour l’étude du modèle de Hawkes et notamment sa généralisation à une intensité de base dépendant de covariables.

- **Stabilisation des estimations** grâce au choix de priors informatifs ou parcimonieux, ce qui réduit la variance des estimateurs dans des situations de faible signal ou de corrélation forte entre covariables.
- **Quantification naturelle de l’incertitude** : la distribution a posteriori fournit directement des intervalles de crédibilité et des probabilités pour des événements d’intérêt, ce qui est beaucoup plus difficile à obtenir dans le cadre fréquentiste, surtout en grande dimension.
- **Cadre naturel pour la prédiction probabiliste** : les prédictions intègrent l’incertitude sur les paramètres, ce qui est crucial pour faire des prédictions honnêtes ne pêchant pas par excès de confiance.
- **Validation et choix de modèle** : des outils comme le calcul de la vraisemblance marginale, les critères Bayes factor ou les approches basées sur la prédiction (cross-validation bayésienne) sont directement disponibles.
- **Méthodes computationnelles robustes** : des algorithmes MCMC et des approches variationnelles bien établies permettent l’estimation même dans des modèles complexes et dépendants.

**Cadre bayésien : ( $p$  fixé) : consistance a posteriori.** Dans l’approche classique (Ghosal and Van der Vaart, 2017), la consistance a posteriori s’obtient en vérifiant (i) un support Kullback–Leibler adéquat du prior autour de la vérité et (ii) l’existence de tests exponentiellement puissants sur des voisinages séparés ; des résultats généraux assurent alors la contraction de la distribution a posteriori. Pour le processus de Hawkes, l’inférence bayésienne est bien établie au niveau computationnel (Rasmussen, 2013), et des résultats récents établissent rigoureusement la contraction de la distribution a posteriori (et même la consistance de la sélection du graphe de Granger) dans des versions multivariées (Sulem et al., 2024) ; ces résultats fournissent un canevas pour traiter l’intensité de base dépendante de covariables.

**Passage à la grande dimension ( $p = p_T \rightarrow \infty$ ) et sélection de variables.** Lorsque  $p$  est grand, nous supposons une structure *éparse* ( $s_0 = \|\theta^*\|_0 \ll p$ ) et visons la ré-

cupération des variables actives  $\text{supp}(\theta^*)$ . Côté fréquentiste, des pénalisations de type Lasso/SCAD ont été étudiées pour des processus ponctuels (y compris Hawkes), avec des inégalités de type oracle et des conditions de compatibilité/régularité adaptées au caractère martingal du bruit (Hansen et al., 2015; Fallahi et al., 2024). Cependant, la **quantification d’incertitude fréquentiste est particulièrement ardue** dans ce cadre, et les approches de type bootstrap sont difficiles à mettre en œuvre en raison de la dépendance des données.

Dans le cadre bayésien, la *sélection bayésienne de variables* repose sur des priors parcimonieux (spike-and-slab, horseshoe, priors non locaux) qui combinent un pic près de zéro (pour annuler des coefficients) et des queues lourdes (pour ne pas sur-rétrécir les signaux). Cette approche rend la **quantification d’incertitude naturelle**, même en grande dimension, et permet d’obtenir des vitesses quasi-optimales pour l’estimation et la prédiction, ainsi que la consistance de sélection sous conditions (Castillo et al., 2015; Narisetty and He, 2014; Johnson and Rossell, 2012; van der Pas et al., 2016, 2017).

Ces garanties haute dimension sont aujourd’hui bien plus complètes pour la régression (linéaire/GLM) que pour l’inférence de paramètres de processus de Hawkes. Une *feuille de route* naturelle est donc : (i) établir la consistance fréquentiste et la normalité asymptotique pour le modèle à intensité de base dépendante de covariables en dimension fixe ; (ii) en déduire la *contraction a posteriori* en dimension fixe ; (iii) passer à la grande dimension en imposant la parcimonie et en recourant à des priors adaptés, afin d’obtenir des vitesses  $\sqrt{(s_0 \log p)/T}$  et, si possible, la consistance de sélection.

**Application.** Nous nous intéressons à une application du modèle en épidémiologie végétale : il s’agit de la tavelure, une maladie fongique qui attaque les fruits et les feuilles des pommiers, en réduisant considérablement la récolte (Jankowski and Masny, 2019). La tavelure est causée par un champignon *Venturia inaequalis*. Ses spores hibernent dans la litière de feuilles mortes de l’année précédente. Au printemps, lorsque les conditions météorologiques sont favorables, elles s’en détachent puis se déposent sur les arbres où elles provoquent de nouvelles infections. C’est le moment optimal pour appliquer le traitement antifongique, l’enjeu est donc de l’anticiper avec précision.

L’événement d’intérêt est ici l’instant de libération des spores ou, plus précisément, l’instant de détection des spores par un capteur. Nous disposons d’un jeu de données de détection des spores dans un verger expérimental et de variables climatiques enregistrées par une station météo locale. L’objectif est d’appliquer le processus de Hawkes pour modéliser la présence des spores, en y intégrant les covariables météorologiques. L’enjeu est tout d’abord de sélectionner des covariables influentes, en s’appuyant sur les propriétés des méthodes bayésiennes : leur robustesse vis-à-vis de dépendances, très présentes dans les données météorologiques, et leur gestion efficace de l’aspect grande dimension. En effet, si le nombre de variables météo considérées au départ n’est pas très élevé, on est tenté d’élargir leur collection, en prenant en compte des interactions, des effets des variables décalées dans le temps, etc. Le modèle avec des variables sélectionnées pourrait être appliqué comme un outil prédictif de la présence des spores pour faciliter la gestion raisonnée des produits phytosanitaires.

Nous envisageons ensuite d'étendre l'application du modèle à d'autres cas en épidémiologie végétale, notamment pour étudier la propagation du champignon responsable du mildiou de la vigne. Même si le contexte appliqué est similaire, les données observées ne sont plus des temps d'occurrence mais des comptages des événements sur des intervalles de temps de longueur variable. Cette particularité nécessite le développement des méthodes statistiques sur mesure.

**Jeux de données et partenariats.** Des jeux de données de détection de spores et des séries météorologiques issues d'un verger expérimental sont disponibles, avec la possibilité d'élargir à d'autres sites/agents pathogènes via des collaborations au sein d'INRAE. Ces données permettront des validations par simulation et sur des cas réels, et de calibrer des scénarios opérationnels.

**Compétences requises.**

- Doctorat en statistiques ;
- Compétences en statistique bayésienne et/ou processus ponctuels seraient en plus.

**Environnement et moyens.** Le/la postdoctorant·e évoluera dans un environnement collaboratif, avec encadrement régulier et bonnes pratiques de recherche reproductible (revue de code, dépôts open-source). Une valorisation active des résultats (prépublications, soumissions, présentations) est prévue, ainsi qu'une participation à des ateliers/écoles et conférences selon les opportunités.

**Description du poste.** Le poste sera basé au sein de l'unité MaIAGE (<https://maiage.inrae.fr>), à l'INRAE - Centre de Recherche de Jouy-en-Josas. L'encadrement sera assuré par Guillaume Kon Kam King, Chargé de recherche INRAE ; Zacharie Naulet, Professeur junior INRAE ; Madalina Deaconu, Directrice de recherche Inria, équipe PASTA et Katarzyna Adamczyk, Ingénieure de recherche INRAE.

## Références

- Ismaël Castillo, Johannes Schmidt-Hieber, and Aad van der Vaart. Bayesian linear regression with sparse priors. *The Annals of Statistics*, 43(5) :1986–2018, 2015. doi : 10.1214/15-AOS1334. URL <https://arxiv.org/abs/1403.0735>.
- Masoumeh Fallahi, Reza Pourtaheri, and Farzad Eskandari. The multivariate generalized linear hawkes process in high dimensions with applications in neuroscience. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 26(1), 2024. doi : 10.1007/s11009-023-10063-w. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-023-10063-w>.
- Subhashis Ghosal and Aad W Van der Vaart. *Fundamentals of nonparametric Bayesian inference*, volume 44. Cambridge University Press, 2017.

- Xin Guo, Anran Hu, Renyuan Xu, and Junzi Zhang. Consistency and computation of regularized mles for multivariate hawkes processes. *arXiv preprint arXiv :1810.02955*, 2018. URL <https://arxiv.org/pdf/1810.02955v1.pdf>.
- Niels Richard Hansen, Patricia Reynaud-Bouret, and Vincent Rivoirard. Lasso and probabilistic inequalities for multivariate point processes. *Bernoulli*, 21(1), 2015. URL <https://doi.org/10.3150/13-BEJ562>.
- Alan G. Hawkes. Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika*, 58(1) :83–90, 1971. doi : 10.1093/biomet/58.1.83. URL <https://doi.org/10.1093/biomet/58.1.83>.
- Alan G. Hawkes and David Oakes. A cluster process representation of a self-exciting process. *Journal of Applied Probability*, 11(3) :493–503, 1974. doi : 10.2307/3212693.
- Paweł Jankowski and Sylwester Masny. Comparison of mathematical models of maturation rate of the airborne *venturia inaequalis* (cooke) wint. ascospores in central poland. *Journal of Plant Diseases and Protection*, 126(4) :269–279, 2019. doi : 10.1007/s41348-019-00229-5. URL <https://doi.org/10.1007/s41348-019-00229-5>.
- Valen E. Johnson and David Rossell. Bayesian model selection in high-dimensional settings. *Journal of the American Statistical Association*, 107(498) :649–660, 2012. doi : 10.1080/01621459.2012.682536. URL <https://hannig.cloudapps.unc.edu/STOR757Bayes/handouts/JohnsonRussell2012.pdf>.
- Naveen Naidu Narisetty and Xuming He. Bayesian variable selection with shrinking and diffusing priors. *The Annals of Statistics*, 42(2) :789–817, 2014. doi : 10.1214/14-AOS1207. URL <https://projecteuclid.org/journals/annals-of-statistics/volume-42/issue-2/Bayesian-variable-selection-with-shrinking-and-diffusing-priors/10.1214/14-AOS1207.full>.
- Yoshiko Ogata. The asymptotic behaviour of maximum likelihood estimators for stationary point processes. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 30 :243–261, 1978. doi : 10.1007/BF02480216. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02480216>.
- Jakob Gulddahl Rasmussen. Bayesian inference for hawkes processes. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 15 :623–642, 2013. doi : 10.1007/s11009-011-9272-5. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-011-9272-5>.
- Déborah Sulem, Vincent Rivoirard, and Judith Rousseau. Bayesian estimation of nonlinear hawkes processes. *Bernoulli*, 30(2) :1257–1286, 2024. doi : 10.3150/23-BEJ1631. URL <https://projecteuclid.org/journals/bernoulli/volume-30/issue-2/Bayesian-estimation-of-nonlinear-Hawkes-processes/10.3150/23-BEJ1631.short>.

- S. L. van der Pas, J.-B. Salomond, and J. Schmidt-Hieber. Conditions for posterior contraction in the sparse normal means problem. *Electronic Journal of Statistics*, 10(1) :976–1000, 2016. doi : 10.1214/16-EJS1130. URL <https://projecteuclid.org/journals/electronic-journal-of-statistics/volume-10/issue-1/Conditions-for-posterior-contraction-in-the-sparse-normal-means-problem/10.1214/16-EJS1130.full>.
- Stéphanie van der Pas, Botond Szabó, and Aad van der Vaart. Adaptive posterior contraction rates for the horseshoe. *Electronic Journal of Statistics*, 11(2) :3196–3225, 2017. doi : 10.1214/17-EJS1316. URL <https://projecteuclid.org/journals/electronic-journal-of-statistics/volume-11/issue-2/Adaptive-posterior-contraction-rates-for-the-horseshoe/10.1214/17-EJS1316.pdf>.